Кратки решения на задачите

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$25^x - (a+1)5^x - 6a^2 + 3a = 0$$

има единствено решение.

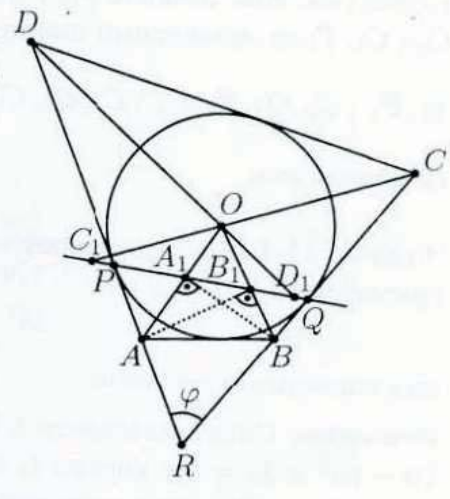
Решение. След полагането $t = 5^x > 0$ уравнението се записва във вида $t^2 - (a + 1)t - 6a^2 + 3a = 0$ с корени $t_1 = 3a$ и $t_2 = 1 - 2a$. За да има уравнението единствено решение, трябва да е изпълнено едно от следните условия: $t_1 \leq 0 < t_2$, $t_2 \leq 0 < t_1$ или $t_1 = t_2 > 0$. Първото условие дава $a \leq 0$, второто $a \geq \dfrac{1}{2}$, а третото $a = \dfrac{1}{5}$. Следователно търсените стойности са

$$a \in (-\infty, 0] \cup \left\{\frac{1}{5}\right\} \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Задача 11.2. В четириъгълник $ABCD$ е вписана окръжност с център O, която се допира до страните AD и BC съответно в точки P и Q. Правите AO, BO, CO и DO пресичат правата PQ съответно в различни точки A_1, B_1, C_1 и D_1.

а) Да се докаже, че $BA_1 \perp AO$.

б) Ако $\dfrac{AB + CD}{A_1B_1 + C_1D_1} = 2$, да се намери ъгълът между правите AD и BC.



Решение. а) Нека за определеност правите AD и BC се пресичат в точка R, като A е между D и R. Да означим $\sphericalangle CRD = \varphi$. Тъй като AO и BO са ъглополовящи, то

$$\begin{aligned} \sphericalangle AOB &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ + \varphi) = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi. \end{aligned}$$

От равнобедрения $\triangle PQR$ намираме $\sphericalangle A_1QB = \sphericalangle PQR = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, което означава, че $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1QB$, т.е. около четириъгълника A_1BQO може да се опише окръжност. Следователно $\sphericalangle BA_1O = \sphericalangle BQO = 90^\circ$.

б) Аналогично на а) намираме, че $\sphericalangle AB_1O = 90^\circ$. Като използваме известния факт, че $\triangle ABO \sim \triangle B_1A_1O$ с коефициент на подобие $\cos \sphericalangle AOB$, намираме $A_1B_1 = AB\cos(90^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$.

Аналогично намираме, че $\sphericalangle COD = 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$ и понеже $\triangle COD \sim \triangle D_1OC_1$ с коефициент на подобие $\cos(180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\varphi)) = \cos(90^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$, то $C_1D_1 = CD\cos(90^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$.

Следователно $\cos(90^\circ - \dfrac{1}{2}\varphi) = \dfrac{A_1B_1 + C_1D_1}{AB + CD} = \dfrac{1}{2}$, откъдето следва $90^\circ - \frac{1}{2}\varphi = 60^\circ$, т.е. $\varphi = 60^\circ$.

Задача 11.3. Нека n е дадено естествено число. Да се намерят всички реални числа a, за които за редицата $x_0 = a$, $x_1 = 1$ и

$$x_{i+2} = \frac{x_{i+1} - (n-i)x_i}{i+1} \quad \text{при} \quad i \geq 0$$

е изпълнено $x_{2010n} = 0$.

Решение. При $i = n$ от рекурентната връзка получаваме $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}}{n+1}$. Оттук намираме

$$x_{n+3} = \frac{\frac{x_{n+1}}{n+1} + x_{n+1}}{n+2} = \frac{x_{n+1}}{n+1}.$$

Тъй като $i > n$, то всички следващи членове на редицата са от вида px_{n+1}, където p е някакво положително рационално число. Следователно, ако $x_{2010n} = 0$, то и $x_{n+1} = 0$, откъдето намираме $x_{n+2} = 0$.

Нека $2 \leq s \leq n+2$. Ще покажем, че $x_s = x_{s-1}$ тогава и само тогава, когато $x_{s-2} = x_{s-3}$. От $x_s = \dfrac{x_{s-1} - (n-s+2)x_{s-2}}{s-1}$ намираме $(s-1)x_s - x_{s-1} = (s-n-2)x_{s-1}$, а от $x_{s-1} = \dfrac{x_{s-2} - (n-s+3)x_{s-3}}{s-2}$ имаме $(s-1)x_{s-1} = x_{s-2} + (s-n-3)x_{s-3}$. Изваждайки горните две равенства получаваме

$$(s-1)(x_s - x_{s-1}) = (s-n-3)(x_{s-2} - x_{s-3}).$$

Тъй като $2 \leq s \leq n+2$, то $s \neq 1$ и $s \neq n+3$ и това равенство доказва твърдението.

Продължавайки по този начин ще получим, че $1 = x_1 = x_0 = a$ когато n е нечетно и до $x_2 = x_1$, когато n е четно и тогава от $x_2 = x_1 - nx_0$ намираме $a = x_0 = 0$.

Следователно търсените стойности са $a = 1$ при n нечетно и $a = 0$ при n четно.

Задача 11.4. В една държава има 1000 града, някои от които трябва да се свържат с двупосочни пътища, така че от всеки град да излизат точно три пътя и от всеки град да може да се стигне до всеки друг град. Път между два града A и B се нарича *главен*, ако след затварянето му от A не може да се стигне до B. Да се докаже, че за всяко цяло число t, $0 \leq t \leq 331$ пътищата могат да се прекарат така, че да има точно t главни пътя.

Решение. От всяка държава с градове и пътища между някои от тях образуваме по естествен начин граф. Свързан граф, всички върхове на който са от степен 3 ще наричаме *правилен* граф. Тъй като всички върхове са от степен 3, в този граф има цикъл, като е ясно, че всяко ребро от цикъл не може да бъде главно.

Лема 1. Ако G е правилен граф с n върха, то съществува правилен граф G_1 с $n+2$ върха, като G и G_1 имат един и същи брой главни ребра.

Доказателство: Да разгледаме две ребра AB и AC от G, които участват в цикъл. Да заменим тези ребра с ребрата AX, AY, BX, CY и XY, където X и Y са два нови върха и нека полученият граф е G_1. Графът G_1 е правилен, като при това ребрата AX, AY и XY не са главни (поради цикъла $AXYA$). Ако допуснем, че BX е главно в G_1, то и BA е главно в G (защото ако BA не е главно в G, то от B може да се стигне до X в G_1 като първо се стигне до A и след това до X). Но AB и AC не са главни, което означава, че BX (аналогично CY) не е главно. Получихме правилен граф G_1 със същия брой главни ребра като G.

Лема 2. Ако G е правилен граф с n върха, то съществува правилен граф G_1 с $n+6$ върха, като G_1 има един главен път повече от G.

Доказателство: Да разгледаме произволно ребро AB от G, което не е главно. Нека G_1 е графът, получен от G чрез добавяне на върхове P, Q, R, S, T и H, изтриване на реброто AB и добавяне на ребра AP, BP, PQ, QR, RS, ST, TH, RT и SH. Лесно се вижда, че главните ребра на G са главни и в G_1, а само PQ от добавените ребра е главно.

Лема 3. Съществува граф с $6s+4$ върха и $2s-1$ главни ребра.

Доказателство: Да разгледаме дърво G с $2s$ върха, като от всеки връх, който не е листо излизат три ребра. Нека G има x листа. Тъй като ребрата му са $2s-1$ имаме равенството $1.x+3.(2s-x)=2(2s-1)$, откъдето намираме $x=s+1$. За всеки лист A на G да прибавим върхове B, C, D и E и ребра AB, AE, BC, CD, DE, BD и EC. Лесно се вижда, че полученият граф G_1 е правилен, като главни са само ребрата на дървото G. При това върховете на G_1 са точно $2s+4(s+1)=6s+4$. Така конструирахме граф с $6s+4$ върха и $2s-1$ главни ребра.

От Лема 3 при $s=166$ получаваме граф с 1000 върха и 331 главни ребра.

За нечетни $t<331$ от Лема 3 и Лема 1 следва, че съществува граф с 1000 върха и t главни ребра.

За четно $t=2s\leq 330$ от Лема 3 можем да намерим граф с $2s-1$ главни ребра и $6s+4\leq 994$ върха. Сега от Лема 2 и Лема 1 следва съществуването на граф с 1000 върха и t главни ребра.