Кратки решения на задачите

Задача 10.1. Да се реши неравенството

$$\sqrt{x^3 - 7x^2 + 36} < x - 1.$$

Решение. Определяме дефиниционното множество:

$$x^3 - 7x^2 + 36 \geqq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)(x-6) \geqq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 3] \cup [6, +\infty).$$

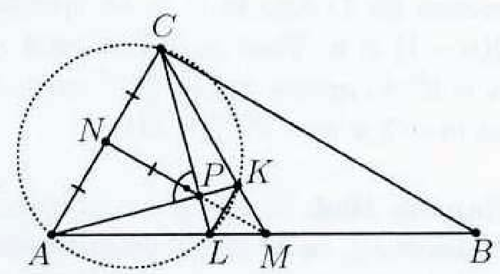
Случай 1. Ако $x \in [-2, 1)$, то $\sqrt{x^3 - 7x^2 + 36} \geq 0 > x - 1$ и не достигаме до решение.

Случай 2. Ако $x \in [1, 3] \cup [6, +\infty)$, то повдигаме на квадрат двете страни на неравенството и след преобразуване достигаме до

$$x^3 - 8x^2 + 2x + 35 < 0 \Leftrightarrow (x-7)(x^2 - x - 5) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}, 7\right).$$

Така окончателно получаваме $x \in \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}, 3\right] \cup [6, 7)$.

Задача 10.2. В $\triangle ABC$ $(AC < BC)$ са построени ъглополовящата CL и медианата CM $(L, M \in AB)$. Права през A, перпендикулярна на CL, пресича CM в точка K. Да се намери $\sphericalangle ACB$, ако точките A, L, K и C лежат на една окръжност.



Решение. Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$, $P = AK \cap CL$ и N е средата на AC. По условие $\sphericalangle APC = 90^\circ$ и следователно $\sphericalangle ANP = 2 \sphericalangle ACP = \gamma$. От друга страна MN е средна отсечка в $\triangle ABC$, т.е. $\sphericalangle ANM = \sphericalangle ACB = \gamma$ и следователно точките N, P и M лежат на една права. От теоремата на Чева за $\triangle ACM$ получаваме

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CK}{KM} \cdot \frac{ML}{LA} = 1 \Rightarrow \frac{CK}{KM} = \frac{AL}{LM}$$

и от теоремата на Талес следва, че $KL \parallel AC$. Но по условие точките A, L, K и C лежат на една окръжност, т.е. $ALKC$ се оказва равнобедрен трапец и $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MAC \Rightarrow AM = CM = BM$ и $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Забележка: От колинеарността на точките N, P и M и обратната теорема на Щайнер директно следва, че $KL \parallel AC$. Но можем решим задачата и без да доказваме, че $KL \parallel AC$, като съобразим, че при дадените условия $\sphericalangle ACM + \sphericalangle ABC = 90^\circ$, което при $AC \neq BC$ е изпълнено точно, когато $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ (*Защо?*).

Задача 10.3. Да се намерят всички двойки естествени числа $m > 1$ и $n > 1$, такива че m^{n-1} дели $n!$.

Решение. Нека числата m и n удовлетворяват условието на задачата и p е прост делител на m. Тогава p^{n-1} дели $n!$; в частност $p \le n$. Нека $k \in \mathbb{N}$ е такова, че $p^k \le n < p^{k+1}$. Най-голямото естествено число λ, за което p^λ дели $n!$ е

$$\lambda = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right] \le \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \ldots + \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p^k}\right). \quad (1)$$

Оттук следва $\lambda < \frac{n}{p-1} \le n$ (понеже $p \ge 2$), а при $p \ge 3$ имаме $\lambda < \frac{n}{2} < n - 1$ (понеже $n \ge p > 2$). Това означава, че p^n не дели $n!$, а при $p \ge 3$ и p^{n-1} не дели $n!$. Значи m е степен на 2. Ако $m > 2$, то трябва $2^{2(n-1)}$ да дели $n!$, което е невъзможно, тъй като $2(n-1) \ge n$. Така $m = 2$. Освен това от (1) е ясно, че $\lambda = n - 1$ само когато $p = 2$ и $n = 2^k$. С други думи, 2^{n-1} дели $n!$ само при $n = 2^k$. Следователно търсените числа са $m = 2$ и $n = 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Задача 10.4. В езеро с n острова са построени m моста между някои от островите. Известно е, че от всеки остров, минавайки по някои от мостовете, може да се достигне до произволен друг остров. Разходка наричаме път по някои от островите и мостовете, започващ и завършващ в един и същи остров и ползващ всеки остров или мост не повече от веднъж.

а) Да се докаже, че ако $m = n$, то съществува разходка.

б) Да се докаже, че ако $m = n + 4$, то съществуват две разходки неизползващи общи мостове.

Решение. Нека G е граф с върхове островите и ребра – мостовете; два острова са свързани с ребро, точно когато съответните острови са свързани с мост. Задачата може да бъде преформулирана в термините на графи така: да се докаже, че в прост свързан граф с n върха и n ребра съществува цикъл; ако броят на ребрата е $n + 4$, то съществуват два независими цикъла.

а) Ако всеки връх е от степен поне 2 (и следователно точно 2), то графът е обединение на цикли. Ако съществува връх от степен 1, твърдението следва лесно по индукция.

б) От а) следва, че в G има поне пет цикъла, да речем $C_0, \ldots, C_4$. Да допуснем, че всеки два от тях имат общо ребро. Ако два цикъла C_i и C_j се пресичат в повече от една вериги, очевидно можем да построим два независими цикъла. Следователно можем да предполагаме, че всеки два цикъла си пресичат във верига. Непосредствено се проверява, че ако три от циклите нямат общ връх, отново съществуват два независими цикъла.

Да означим с P_i, Q_i краищата на веригата, обща за C_0 и C_i, $i = 1, \ldots, 4$. Да фиксираме връх от C_0 и посока върху C_0. Ще изследваме реда, в който се появяват върховете P_i и Q_i. Без ограничение на общността можем да приемем, че P_i се появява преди Q_i за всяко i, както и че $P_1, \ldots, P_4$ се появяват в нарастващ ред на индексите.

По-нататък точките $P_1, \ldots, P_4$ са преди точките $Q_1, \ldots, Q_4$. Ако например Q_j е преди P_i, то C_j и C_i са независими. Освен това точките $Q_1, \ldots, Q_4$ се появяват точно в този ред. Ако точките P_i, P_j, Q_j, Q_i, се срещат в този ред, то C_j и P_i, $C_i \setminus C_0$, Q_i, $C_0 \setminus C_i$, P_i са независими цикли. Но сега циклите

$$P_1, C_1 \setminus C_0, Q_1, P_4, C_4 \setminus C_0, Q_4, C_0 \setminus (C_1 \cup C_4), P_1 \quad \text{и} \quad P_2, C_2 \setminus C_0, Q_2, Q_3, C_3 \setminus C_0, P_3, P_2$$

са независими.