Тема за 8 клас

Задача 1. Да се реши уравнението:

$$\left(x-\sqrt{3}-\sqrt{499}\right)^2+\left(x-\sqrt{3}+\sqrt{499}\right)^2+\left(x+\sqrt{3}-\sqrt{499}\right)^2+\left(x+\sqrt{3}+\sqrt{499}\right)^2=2009.$$

Решение: Да означим $a=\sqrt{3}$ и $b=\sqrt{499}$. За лявата страна на уравнението последователно получаваме:

$$\left(x-\sqrt{3}-\sqrt{499}\right)^2+\left(x-\sqrt{3}+\sqrt{499}\right)^2+\left(x+\sqrt{3}-\sqrt{499}\right)^2+\left(x+\sqrt{3}+\sqrt{499}\right)^2=$$

$$=(x-a-b)^2+(x-a+b)^2+(x+a-b)^2+(x+a+b)^2=$$

$$=x^2-2(a+b)x+(a+b)^2+x^2+2(b-a)x+(a-b)^2+x^2+$$

$$+2(a-b)x+(a-b)^2+x^2+2(a+b)x+(a+b)^2=$$

$$=4x^2+2(a-b)^2+2(a+b)^2=4x^2+4a^2+4b^2.$$

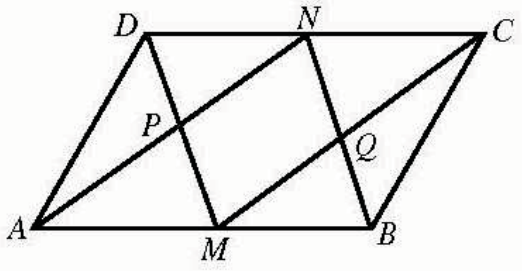
Оттук за даденото уравнение получаваме, че е еквивалентно на

$$4x^2+2008=2009 \Leftrightarrow 4x^2=1 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0.$$

Следователно даденото уравнение има два корена: числата $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$.

<u>*Схема на оценяване*</u>: 1 т. за правилно разкриване на поне една двойка скоби, по 1 т. за получаване на коефициентите (4, 0 и -1) на квадратното уравнение $4x^2-1=0$, по 1 т. за намиране на всеки от корените.

Задача 2. Точките M и N са съответно средите на страните AB и CD на четириъгълника $ABCD$. Отсечките AN и DM се пресичат в точката P, а отсечките CM и BN се пресичат в точката Q. Ако $PMQN$ е успоредник, да се докаже, че медицентровете на триъгълниците ABD, ABC, ACD и BCD са върхове на успоредник.



Решение: Първо ще докажем, че ако $PMQN$ е успоредник, то и $ABCD$ е успоредник. От $PM \parallel QN$ и това, че M е средата на AB, следва (съгласно теоремата за средната отсечка, приложена за $\triangle ANB$), че точката P е средата на AN. Аналогично Q е средата на CM. Сега от $PN=MQ$ следва, че $AN=CM$ и с помощта на условието $PN \parallel MQ$ заключаваме, че $AMCN$ е успоредник. Оттук $AM \parallel NC$ и $AM=NC$ и следователно $ABCD$ също е успоредник. Нека G_1, G_2, G_3 и G_4 са съответно медицентровете на триъгълниците ABD, ABC, BCD и ACD.

(1) Нека $AC \cap BD = O$. Тогава $G_1 \in AC$ и $AG_1 : G_1O = 2:1$, откъдето $G_1O = \frac{1}{3}AC$. Аналогично $G_2O = \frac{1}{3}BD$, $G_3O = \frac{1}{3}AC$ и $G_4O = \frac{1}{3}BD$. Получаваме, че в четириъгълника $G_1G_2G_3G_4$ диагоналите взаимно разполовяват и следователно той е успоредник.

(2) Ще докажем, че $G_1G_2G_3G_4$ е успоредник по друг начин. Тъй като $S_{ABG_1} = \frac{1}{3}S_{ABD} = \frac{1}{3}S_{ABC} = S_{ABG_2}$ и триъгълниците ABG_1 и ABG_2 са с обща основа, то височините в тези триъгълници към общата основа са също равни. Това означава, че $G_1G_2 \parallel AB$. По аналогичен начин следва, че $G_3G_4 \parallel CD$, $G_1G_4 \parallel AD$ и $G_2G_3 \parallel BC$. Заключаваме, че $G_1G_2G_3G_4$ е успоредник.

(3) За втората част на решението могат да се използват и вектори. Имаме:

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \left(\overrightarrow{G_1O} + \overrightarrow{OG_2}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC},$$

където O е произволна точка. Аналогично

$$\overrightarrow{G_4G_3} = \left(\overrightarrow{G_4O} + \overrightarrow{OG_3}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Но $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, защото $ABCD$ е успоредник и следователно $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{G_4G_3}$. Оттук отново следва, че $G_1G_2G_4G_3$ е успоредник.

Схема на оценяване: по 1 т. за доказателство, че P е среда на AN и Q е среда на CM, още 1 т. за довършване на доказателството, че $ABCD$ е успоредник.

В случай на (1). 2т. за доказване на $G_1O = \frac{1}{3}AC$ или на някое друго от аналогичните три равенства и 1 т. за довършване на решението.

В случай на (2). За съображението, че $S_{ABG_1} = \frac{1}{3}S_{ABD}$ (или за някой друг от триъгълниците с връх в медиентър) 1 т. За съображението, че триъгълниците ABG_1 и ABG_2 (или някоя друга от двойките триъгълници) са с обща основа и равни височини към тази основа – също 1 т. За заключението, че $G_1G_2 \parallel AB$ – още 1 т.

В случай на (3). По 1 т. за векторните равенства за $\overrightarrow{G_1G_2}$ и $\overrightarrow{G_3G_4}$ и още 1 т. за довършване на доказателството.

Задача 3. Всяка клетка на правоъгълна таблица с 6 реда и n стълба е оцветена в един от цветовете бяло, зелено или червено. За произволен правоъгълник от клетки на таблицата, който е с четири различни ъглови клетки, поне две от ъгловите му клетки са разноцветни. Да се намери възможно най-голямата стойност на n.

Решение: Във всеки стълб (от 6 клетки) има поне три двойки едноцветни клетки (ако в някой стълб поне три от клетките са едноцветни, твърдението е вярно за тях; в противен случай има по една двойка от всеки от цветовете). Ако $n \geq 16$, то общият брой двойки едноцветни клетки е поне $16.3 = 48$. Оттук следва, че поне 16 от двойките са от един и същ цвят (например бял). Да номерираме клетките във всеки от стълбовете с числата от 1 до 6 в зависимост от номерата на редовете, в които се намират. Броят на различните ненаредени двойки (i, j), където $i \neq j$ приемат стойности от 1 до 6, е равен на 15. Тъй като поне 16 от двойките клетки са бели, заключаваме, че поне две от

двойките са с една и съща номерация (i, j) в съответните им стълбове. Ясно е, че две такива двойки могат да бъдат избрани за ъгли на правоъгълник в таблицата и следователно ще получим правоъгълник, за който четирите му ъглови квадратчета са бели. Заключаваме, че $n \le 15$. (За пълно доказателство на факта, че $n \le 15$ – общо 4 т., от които 2 т. за идеята да се броят ненаредените двойки от 6 елемента и 2 т. за завършване на тази част.)

Ще посочим пример за $n = 15$ (за верен пример 3 т.). Да кодираме шестте реда на таблицата с върховете на правилен шестоъгълник и най-напред да групираме по двойки съседните върхове на шестоъгълника. Това може да стане по 2 начина: $(1,2), (3,4), (5,6)$ или $(1,6), (2,3), (4,5)$, ако последователните върхове на шестоъгълника са номерирани с числата от 1 до 6. Всяко групиране може да се оцвети по 3 начина и така получаваме общо 6 различни начина за оцветяване. Сега групираме по следния начин: един връх с отсрещния, а останалите върхове – по двойки през връх. Възможни са 3 начина за разположение, а за всяко разположение – по 3 начина за оцветяване. Получаваме 9 различни начина, които заедно с предните 6 дават общо 15 начина. Ето едно оцветяване, направено по този начин:

Б	З	Ч	Б	З	Ч	Б	З	Ч	Ч	Б	З	З	Ч	Б
Б	З	Ч	З	Ч	Б	З	Ч	Б	Б	З	Ч	Ч	Б	З
З	Ч	Б	З	Ч	Б	Ч	Б	З	Ч	Б	З	Б	З	Ч
З	Ч	Б	Ч	Б	З	Б	З	Ч	З	Ч	Б	Ч	Б	З
Ч	Б	З	Ч	Б	З	Ч	Б	З	Б	З	Ч	З	Ч	Б
Ч	Б	З	Б	З	Ч	З	Ч	Б	З	Ч	Б	Б	З	Ч

Задача 4. За всяко естествено число n подреждаме делителите му по големина:

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n.$$

Да се намерят всички n, за които е вярно равенството $d_2^3 + d_3^2 - 15 = n$.

Решение: Тъй като всеки делител на d_2 е делител на и n, то d_2 трябва да е просто, защото n няма по-малък делител от d_2, освен 1. Нека $d_2 = p$, $p -$ просто. Същото разсъждение, приложено за d_3, дава, че d_3 е или просто, или $d_3 = p^2$. Ако е налице втората възможност, то от даденото равенство ще следва, че p^2 дели 15, което е невъзможно. Следователно можем да считаме, че и d_3 е просто. Нека $d_3 = q > p$. Тъй като p и q са взаимно прости делители на n, то n ще се дели на произведението pq и можем да означим $n = kpq$ за някакво естествено число k. Ако $k = 1$, то даденото равенство приема вида $p^3 + q^2 - 15 = pq$. Оттук при $p = 2$ получаваме, че q трябва да дели 7, т.е. $q = 7$. В този случай обаче равенството не е изпълнено (проверете!). Ако $p > 2$, то от неравенствата $q^2 > pq$ и $p^3 - 15 > 0$ следва, че $p^3 + q^2 - 15 > pq$ и решение отново не се получава. Заключаваме, че $k > 1$. Ако допуснем, че $1 < k < p$, то от факта, че k дели n ще получим, че n има делител между 1 и d_2, което е невъзможно. Да разгледаме случая $k = p$. Сега даденото равенство приема вида $p^3 + q^2 - 15 = p^2 q$. Да запишем последното като квадратно уравнение относно q. Получаваме $q^2 - p^2 q + p^3 - 15 = 0$. За да има това уравнение цяло решение, е необходимо дискриминантата му D да е точен квадрат на цяло число. Тъй като $D = p^4 - 4p^3 + 60 = \left(p^2 - 2p - 2\right)^2 - 8p + 56$, то $D < \left(p^2 - 2p - 2\right)^2$ при $p \ge 8$. От друга

страна $D-\left(p^2-2p-3\right)^2=2p^2-12p+51=2p\left(p-6\right)+51$. Става ясно, че при $p\geq 8$ дискриминантата не може да е точен квадрат, понеже $\left(p^2-2p-3\right)^2<D<\left(p^2-2p-2\right)^2$ и следователно D е заключена между два последователни точни квадрата. Ето защо решения на задачата могат да се получат само за $p=2,\ 3,\ 5$ или 7. Но $p=3$ и $p=5$ са делители на 15 и би се получило, че p дели q, което е невъзможно. При $p=2$ ще получим $q^2-7=4q\Rightarrow q\,|\,7\Rightarrow q=7,\ n=28$, но непосредствено се проверява, че това не е решение на задачата. При $p=7$ имаме $q^2+328=49q$ и следователно q е прост делител на $328=2^3\cdot 41$. Тъй като $q>p=7$, то $q=41$ и оттук $n=2009$. Проверката показва, че се получава решение на задачата. По-нататък, не може $p<k<q$, понеже от $k\,|\,n$ би се получило, че n има делител между d_2 и d_3. Ако най-накрая $k\geq q$, то имаме $n=kpq\geq pq^2=q^2+\left(p-1\right)q^2\geq q^2+\left(p-1\right)\left(p+1\right)^2=q^2+p^3-15+p^2-p+14>q^2+p^3-15$, което означава, че даденото равенство не е изпълнено. Тук използвахме, че $q>p\Rightarrow q\geq p+1$. Следователно единственото решение на задачата е $n=2009$.

Схема на оценяване: 1 т. за получаване на равенството $p^3+q^2-15=kpq$; 1 т. за случая $k=1$; 3 т. за случая $k=p$, от които 2 т. за изследване на дискриминантата и 1 т. за получаването на отговора 2009; 1 т. общо за случаите $1<k<p$ и $p<k<q$; 1 т. за случая $k\geq q$.