Тема за 7 клас

Задача 1. Две яхти тръгват едновременно от двата противоположни бряга на река и се движат една срещу друга с постоянни (не задължително равни) скорости перпендикулярно на брега. Когато стигнат отсрещния бряг, яхтите се връщат незабавно назад. Първата среща на яхтите е на $630\ m$ от един от бреговете, а втората среща е на обратния им път на $250\ m$ от един от бреговете. Да се намери широчината на реката, ако течението се пренебрегва.

Решение: До първата среща една от яхтите (нека това е яхта 1) е изминала $630\ m$ от брега, от който тя е тръгнала. Възможни са 2 случая.

Първи случай. Втората среща е на $250\ m$ от другия бряг. Тогава до първата среща двете яхти изминават общо разстояние, равно на широчината на реката, а до втората среща – три пъти широчината на реката. Тъй като скоростите са постоянни, до втората среща всяка от яхтите изминава разстояние, три пъти по-голямо, отколкото до първата среща. До първата среща яхта 1 е изминала $630\ m$ и следователно до втората среща тя е изминала общо $3.630 = 1890\ m$ (2 т.). При това изминатото разстояние е с $250\ m$ по-голямо от широчината на реката. Следователно търсената широчина е $1890 - 250 = 1640\ m$ (1 т.).

Втори случай. Втората среща е на $250\ m$ от същия бряг. С аналогични на горните разсъждения получаваме, че яхта 1 е изминала до втората среща общо $3.630 = 1890\ m$ (2 т.). Това разстояние е по-малко от удвоената широчина на реката с $250\ m$. Следователно търсената широчина е $\frac{1890 + 250}{2} = 1070\ m$ (1 т.).

Задача 2. Върху страните BC и AC вън от остроъгълния ΔABC са построени квадратите $BCMN$ и $ACPQ$. Да се намери лицето на четириъгълника $ABMP$, ако $AM = 6$ *см*.

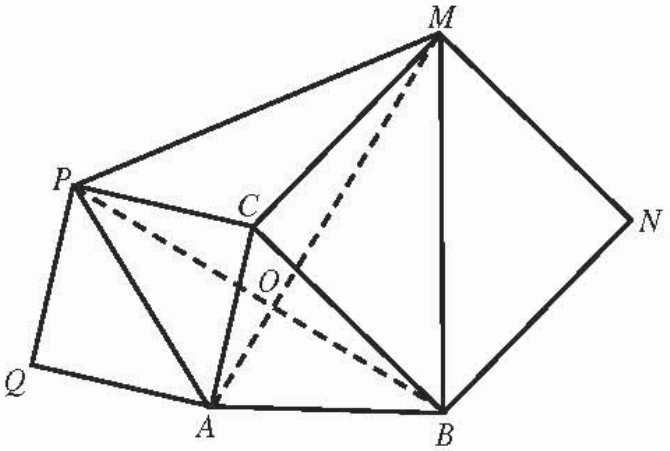
Решение: Отговор 18 *кв.см*

Разглеждаме ΔAMC и ΔPBC:

1) $AC = PC$ (страни в квадрата $ACPQ$);

2) $MC = BC$ (страни в квадрата $BCMN$);

3) $\angle ACM = \angle ACB + \angle BCM = \angle ACB + 90^0 = \angle ACB + \angle ACP = \angle PCB$. Следователно двата триъгълника са еднакви по I признак. Оттук $AM = BP = 6$ *см*. Освен това $\angle CAM = \angle CPB$, откъдето $\angle CAM + \angle CAP + \angle APB =$ $= \angle CPB + \angle CAP + \angle APB = 90^0$.



Получаваме, че $\angle AOP = 90^0$, където O е пресечната точка на AM и BP. Тогава $S_{ABMP} = S_{BPA} + S_{BPM} =$

$$= \frac{1}{2} BP.(AO + OM) =$$

$$\frac{1}{2} BP.AM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ кв. см.}$$

Схема на оценяване: 2 т. за доказване на $AM = BP = 6$ *см*; 3 т. за доказване, че $AM \perp BP$; 1 т. за довършване на решението.

Задача 3. С $D(n)$ е означен броят на делителите на естественото число n, включително 1 и n. Да се намери най-малкото n, за което

$$3D(343n) - 2D(41n) = 3D(n).$$

Решение: Нека $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, където p_1, p_2, ... , p_k са различни прости числа. Тогава $D(n) = (a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1)$. Тъй като $343 = 7^3$ и 41 е просто число, да означим $n = 7^x \cdot 41^y \cdot m$, където $x \ge 0$ и $y \ge 0$, m е взаимно просто със 7 и 41. Имаме, че

$$D(343n) = D(7^{x+3} \cdot 41^y \cdot m) = (x+4)(y+1)D(m),$$

$$D(41n) = D(7^x \cdot 41^{y+1} \cdot m) = (x+1)(y+2)D(m) \text{ и } D(n) = D(7^x \cdot 41^y \cdot m) = (x+1)(y+1)D(m).$$

Сега условието от задачата става $3(xy + x + 4y + 4) - 2(xy + 2x + y + 2) = 3(xy + x + y + 1)$, откъдето $2xy + 4x = 7y + 5$. При $x = 0$ и $x = 1$ съответните y са отрицателни и следователно не са решения. От друга страна, ако $x \ge 4$, то $2xy + 4x \ge 8y + 16 > 7y + 5$ и заключаваме, че единствените възможности за x са $x = 2$ и $x = 3$. Съответните стойности на y са $y = 1$ и $y = 7$. Тъй като търсим най-малкото n, то трябва $x = 2$, $y = 1$ и $m = 1$. Следователно отговорът на задачата е $n = 7^2 \cdot 41 = 2009$.

Второ решение: Да допуснем, че търсеното най-малко n има прост делител p, различен от 7 и 41. Нека $n = p^k n_1$, където p не дели n_1. Тогава, ако всички делители на n, взаимно прости с p, са $d_1, d_2, \ldots, d_m$, то делителите на n можем да разделим на $k+1$ групи с равен брой числа в тях, а именно:

$$(d_1, d_2, \ldots, d_m), (pd_1, pd_2, \ldots, pd_m), (p^2 d_1, p^2 d_2, \ldots, p^2 d_m), \ldots, (p^k d_1, p^k d_2, \ldots, p^k d_m).$$

Това означава, че $D(n) = \dfrac{D(n_1)}{k+1}$. По същия начин пресмятаме, че $D(341n) = \dfrac{D(341n_1)}{k+1}$ и $D(41n) = \dfrac{D(41n_1)}{k+1}$. Но тогава n_1 също удовлетворява даденото равенство и е по-малко от n, което е невъзможно. Следователно разлагането на n на прости множители има вида $n = 7^x 41^y$, където $x \ge 0$ и $y \ge 0$. Но тогава

$$D(n) = (x+1)(y+1),\ D(41n) = (x+1)(y+2) \text{ и } D(343n) = (x+4)(y+1).$$

Даденото равенство придобива вида $3(x+4)(y+1) - 2(x+1)(y+2) = 3(x+1)(y+1)$ или $9(y+1) = 2(x+1)(y+2)$. Но $y+1$ и $y+2$ са последователни естествени числа и са взаимно прости, откъдето следва, че $y+2$ е делител на 9, по-голям от 1. Ето защо или $y+2 = 3$, или $y+2 = 9$. От първото равенство получаваме $y = 1, x = 2$, а от второто получаваме $y = 7$, $x = 3$. По-малката стойност на n се получава в първия случай и тя е $n = 7^2 \cdot 41 = 2009$.

Схема на оценяване: 5 т. за редуциране на задачата до $2xy + 4x = 7y + 5$ в първото решение или до $9(y+1) = 2(x+1)(y+2)$ във второто решение и 2 т. за завършване.

Задача 4. Полетата на шахматна дъска 8×8 са оцветени по обичайния начин в черно и бяло. За един ход най-напред Ани избира един ред и променя цвета на полетата в него (бяло $\Leftrightarrow$ черно), а след това Боби избира една колона и променя цвета на полетата в нея (бяло $\Leftrightarrow$ черно). След няколко хода броят на белите полета на дъската се оказал n. Да се определи възможно най-малката положителна стойност на n.

Решение: Ако Ани и Боби последователно променят редовете и колоните с четни номера, то от шахматното оцветяване може да се получи чисто черно оцветяване (разбира се и обратното). Следователно, ако определено оцветяване е постижимо от шахматното оцветяване, то е постижимо и от чисто черното оцветяване (и обратно). Ето защо, за улеснение на броенето ще приемем, че началното оцветяване е чисто черно. Нека a е броят на редовете, които са променяни нечетен брой пъти, а b е броят на колоните, които са променяни нечетен брой пъти. С всеки ход всяко от числата a и b се променя с 1 и следователно те винаги са с еднаква четност. Тъй като началното оцветяване е чисто черно, то полетата, които стават бели, са променяни нечетен брой пъти и $n=(8-a)b+(8-b)a=8(a+b)-2ab$. Заключаваме, че n е четно, т.е. $n=2k$ $(k=1,2,...,32)$. От $8(a+b)-2ab=2k$ намираме $4(a+b)-ab=k$. Последното равенство може да се запише във вида $(a-4)(b-4)=16-k$. Тъй като a и b приемат стойности от 0 до 8, то числата $a-4$ и $b-4$ са от интервала $[-4;4]$. Търсим възможно най-малкото положително k и затова на k даваме последователно стойности 1, 2, 3 и т.н., като за $16-k$ получаваме последователно стойностите 15, 14, 13 и т.н.. Първата стойност на $16-k$, която може да се представи като произведение на две числа от $[-4;4]$ с еднаква четност, е 9. Имаме $9=3\cdot 3$ или $9=(-3)\cdot(-3)$, като в първия случай $a=b=7$, във втория – съответно $a=b=1$. Получаваме, че първата възможност за $k>0$ е $k=7$, откъдето $n=14$.

Забележка. Задачата може да се реши и с изчерпване на 41-те случая, съответстващи на различните стойности на a и b с еднаква четност. В показаната таблица редовете и стълбовете са номерирани с възможните стойности на a и b, а всеки от елементите на таблицата е броят на белите полета в съответния случай.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0		16		32		48		64
1		14		26		38		50	
2	16		24		32		40		48
3		26		30		34		38	
4	32		32		32		32		32
5		38		34		30		26	
6	48		40		32		24		16
7		50		38		26		14	
8	64		48		32		16		0

<u>*Схема на оценяване*</u>: 1 т. за прехода към чисто черно оцветяване, 1 т. за разсъждението за четността на a и b, 1 т. за четността на броя на белите полета, 1 т. за пресмятането на броя им, 1 т. за получаване на равенството $(a-4)(b-4)=16-k$, 1 т. за отхвърляне на случаите 15, 14, 13, 12, 11 и 10, 1 т. за намирането на крайния отговор.