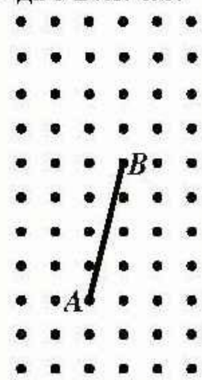
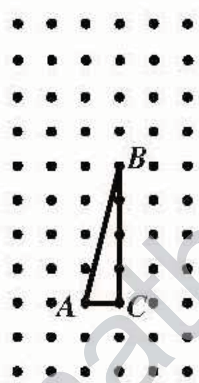
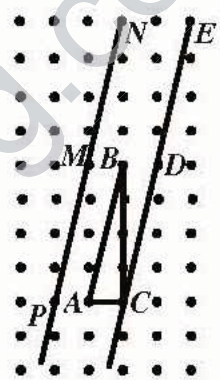
Тема за 5 клас

Задача 1. Дадените 66 точки са върхове на квадратчета със страна 1 *см*. Две от точките са означени с A и B. Колко от останалите 64 точки могат да се означат с C така, че лицето на триъгълника ABC да е 2 *кв. см*?



Решение: Една от търсените точки е показана на първата фигура. Дължината на страната BC е 4 *см*, а височината към тази страна е 1 *см*. Оттук следва, че лицето на ΔABC е 2 *кв. см*. Остава да проверим кои от 66-те дадени точки са разположени върху прави, успоредни на AB и са на разстояние, равно на разстоянието от C до AB. Точката D от втората фигура е измежду търсените – $ACDB$ е успоредник. Аналогично и $ADEB$ е успоредник и следователно точката E е също измежду търсените. По подобен начин лицето на ΔABM е 2 *кв. см*, а $ABMP$ и $ABNM$ са успоредници.





Отговорът на задачата е 6. (Получаването на всяка от шестте точки C, D, E, M, P и N се оценява с по 1 т. независимо от обосновките.)

Задача 2. Дадено е числото $560,7489$. От него получете числото $20,09$ с възможно най-малък брой пъти използване на следните действия:

(1) деление на числото с 2;

(2) изтриване на най-лявата или най-дясната цифра.

Решение: Да разгледаме цялата част на даденото число. Ако отстраним най-лявата цифра 5, ще получим 60 и оттук няма как да стигнем до 20. Затова трябва да разделим с 2 и ще получим 280. Нататък са възможни два варианта. При първия да отстраним най-лявата цифра 2. Получаваме 80 и сега задължително трябва два пъти подред да разделим на 2. Така стигаме до 20 чрез трикратно прилагане на операция (1) и еднократно прилагане на операция (2). При втория вариант да разделим с 2, при което получаваме 140. При по-нататъшно разделяне с 2 няма как да получим 20 и затова задължително трябва да отстраним най-лявата цифра 1. Остава още едно разделяне с 2. Заключаваме, че и при втория вариант е необходимо трикратно прилагане на операция (1) и еднократно прилагане на операция (2). Трите разделяния с 2 намаляват дробната част на числото 8 пъти, при което се получава 0,09 и още поне 2 цифри след деветката. Заключаваме, че са необходими още най-малко две отстранявания. Така, за крайното число 20,09 са необходими поне 6 прилагания на операциите (1) и (2). Ето 3 реализации с 6 операции:

$$560,7489 \xrightarrow{(2)} 560,748 \xrightarrow{(1)} 280,374 \xrightarrow{(1)} 140,187 \xrightarrow{(2)} 40,187 \xrightarrow{(2)} 40,18 \xrightarrow{(1)} 20,09,$$

$$560,7489 \xrightarrow{(2)} 560,748 \xrightarrow{(1)} 280,374 \xrightarrow{(1)} 140,187 \xrightarrow{(2)} 140,18 \xrightarrow{(2)} 40,18 \xrightarrow{(1)} 20,09,$$

$$560,7489 \xrightarrow{(2)} 560,748 \xrightarrow{(1)} 280,374 \xrightarrow{(2)} 80,374 \xrightarrow{(1)} 40,187 \xrightarrow{(2)} 40,18 \xrightarrow{(1)} 20,09.$$

За резултат с повече от 7 операции – общо 1 т.

За резултат със 7 операции – общо 2 т. Ето 3 възможни примера със 7 операции:

$$560,7489 \xrightarrow{(2)} 560,748 \xrightarrow{(2)} 560,74 \xrightarrow{(1)} 280,37 \xrightarrow{(2)} 80,37 \xrightarrow{(1)} 40,185 \xrightarrow{(2)} 40,18 \xrightarrow{(1)} 20,09,$$

$$560,7489 \xrightarrow{(2)} 560,748 \xrightarrow{(1)} 280,374 \xrightarrow{(2)} 280,37 \xrightarrow{(2)} 80,37 \xrightarrow{(1)} 40,185 \xrightarrow{(2)} 40,18 \xrightarrow{(1)} 20,09$$

$$560,7489 \xrightarrow{(2)} 560,748 \xrightarrow{(1)} 280,374 \xrightarrow{(2)} 80,374 \xrightarrow{(2)} 80,37 \xrightarrow{(1)} 40,185 \xrightarrow{(2)} 40,18 \xrightarrow{(1)} 20,09.$$

За резултат с 6 операции – общо 3 т., за обосновка, че 6 е минималният брой – 3 т.

Задача 3. Квадратна дъска със страна 2009 е разделена на единични квадратчета и четирите ъглови квадратчета са изрязани. Пионка се намира в едно от оставащите квадратчета. За един ход тя преминава в съседно квадратче по хоризонтал или вертикал. Възможно ли е пионката да обходи всички квадратчета, преминавайки точно по веднъж през всяко от тях? Обосновете отговора си!

Решение: Преди изрязването на четирите ъглови квадратчета да оцветим дъската шахматно (1 т.). Тъй като числото 2009 е нечетно, то четирите ъглови квадратчета са едноцветни (още 1 т.). Освен това броят на оставащите квадратчета е нечетен, като тези с цвета на изрязаните са с 3 по-малко от останалите, т.е. разликата между броя на квадратчетата от единия цвят и броя на квадратчетата от другия цвят е равна на 3 (това съображение се оценява с 2 т.). От друга страна при преминаване от квадратче в квадратче се сменя цветът (това съображение се оценява с 2 т., като последната 1 т. се присъжда за завършване на решението) и следователно разликата между броя на квадратчетата от единия цвят и броя на квадратчетата от другия цвят е равна на 1. Стигаме до два несъвместими извода, което показва, че не е възможно пионката да обходи всички квадратчета, преминавайки точно по веднъж през всяко от тях.

Задача 4. Разполагаме с 16 еднакви карти, върху които е записано точно по едно от числата от 1 до 16. Двама играчи играят следната игра. Първият, скрито от втория, подрежда картите по свой избор в купчина една върху друга с лицето надолу. Вторият си избира едно трицифрено число и го съобщава на първия. Числото трябва да съдържа само цифрите 1, 2 и 3 без или с повторение. Първият играч започва да брои картите отгоре надолу и поставя всяка преброена карта най-отдолу в купчината. Когато стигне до картата, отговаряща на съобщеното число, той я обръща. Ако числото върху обърнатата карта е 13, печели вторият играч. В противен случай победител е първият играч. Възможно ли е първият играч да излиза винаги победител?

Решение: След като първият играч преброи до 16, подреждането на картите в купчината става същото като първоначалното. Изобщо, когато първият играч преброи до число, кратно на 16, подреждането на картите се възстановява. Следователно обърнатата карта е тази поред отгоре надолу в първоначалната купчина, колкото е остатъкът на съобщеното число при деление на 16. (За направените дотук разсъждения – общо 2 т.)

(За пълно решение до края – още 5 т. За частични резултати, независимо от техния брой, най-много 1 т.) Ще покажем, че измежду трицифрените числа, образувани от единици, двойки и тройки, нито едно не дава остатък 6 при деление на 16. Нека числото е $100a+10b+c$. Тъй като $100=96+4$ и 96 се дели на 16, то съществуването на a, b и c, за които числото $100a+10b+c$ дава остатък 6 при деление на 16 означава, че съществуват числа a, b, c и m, за които $4a+10b+c=16m+6$ при ограниченията за a, b и c от условието на задачата. Оттук следва, че $c=2$, защото числото вдясно на равенството е четно. Получаваме $4a+10b=16m+4$ и като разделим на 2, заключаваме, че $b=2$. Следователно $2a+10=8m+2$. Отново разделяме на 2 и стигаме до равенството $a+5=4m+1$. Последното е невъзможно при нито една стойност на a ($a=1$, 2 или 3). Сега е достатъчно първият играч да подреди картите първоначално така, че картата с числото 13 върху нея да бъде шеста поред отгоре надолу в купчината.

Забележка. Разсъждения, аналогични на извършените, би трябвало да започват със случаите, когато остатъкът последователно е 0, 1, 2 и т.н., докато се стигне до 6. Тогава установяването на използваното по-горе свойство на трицифрените числа, образувани само с единици, двойки и тройки, става по естествен начин. За установяване на това свойство може да се използва и директна проверка на всички такива числа, които са общо 27 на брой. (За изследване на отделни случаи, независимо от техния брой, или само за формулирана хипотеза – 1 т.)