Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически цъстезания
Бургас, 6 - 8 февруари 2009 г.

Тема за 9 клас

Кратки решения на задачите

Задача 9.1. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които корените x_1, x_2 на уравнението $x^2 - ax + 8 - a = 0$ са реални положителни числа и $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} > 16$.

Решение. Корените x_1, x_2 са реални при $D = a^2 + 4a - 32 \geq 0$. Оттук получаваме $a \in (-\infty, -8] \cup [4, +\infty)$. Освен това

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 0, x_1x_2 > 0 \Leftrightarrow a > 0, \quad 8 - a > 0 \Leftrightarrow a \in (0, 8).$$

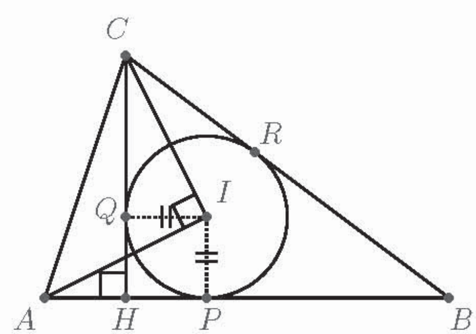
Така $a \in [4, 8)$. По-нататък, тъй като $x_1 > 0, x_2 > 0$, то

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > 16 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 > 16x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 > 18x_1x_2 \Leftrightarrow$$
$$a^2 > 18(8 - a) \Leftrightarrow a^2 + 18a - 144 > 0.$$

Решенията на това неравенство са $a \in (-\infty, -24) \cup (6, +\infty)$. Като вземем предвид, че $a \in [4, 8)$, получаваме търсените стойности на параметъра: $a \in (6, 8)$.

Задача 9.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, в който е спусната височината CH. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle BHC$ окръжност. Да се докаже, че $\angle AIC = 90^\circ$ тогава и само тогава, когато $AB = BC$.

Решение. Нека вписаната в $\triangle BHC$ окръжност k се допира до страните BH, CH и BC съответно в точките P, Q и R. От $\angle AIC = \angle AHC = 90^\circ$ следва, че точките H и I лежат на окръжност с диаметър $AC \Rightarrow \angle PAI = \angle QCI$. Разглеждаме $\triangle API$ и $\triangle CQI$. Имаме



1. $IP = IQ$ (радиуси в k)

2. $\angle API = \angle CQI = 90^\circ$ (допирни точки на k)

3. $\angle PAI = \angle QCI$ (по доказателство)

Така по втори признак $\triangle API \cong \triangle CQI$ и следователно $AP = CQ = CR$. От друга страна $BP = BR$, т.е.

$$AB = AP + BP = CR + BR = BC.$$

Доказателството в обратната посока се извършва аналогично. От $AB = BC$ следва, че $AP = CR = CQ$ и $\triangle API \cong \triangle CQI$ (по първи признак). Оттук следва, че точките A, H, I, C лежат на една окръжност и $\angle AIC = \angle AHC = 90^\circ$.

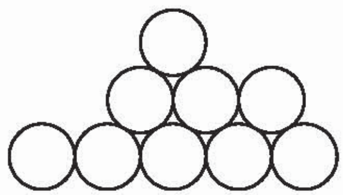
Задача 9.3. Дадени са няколко еднакви монети, които са подредени в редове по следния начин:

- монетите в първия ред се допират една до друга;

- монетите във всеки ред образуват непрекъснат блок;

- монетите във всеки ред допират точно две монети в долния ред.

Едно допустимо подреждане с 5 монети в първия ред е следното:



Нека $A(n)$ е броят на възможните конфигурации, имащи n монети в първия ред. Да се намери най-малкото n, за което $A(n) > 10^4$.

Решение. Ако във втория ред имаме k монети, то те могат да бъдат поставени по $n-k$ начина в един непрекъснат блок. Следователно

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n-k} A(k)(n-k) + 1.$$

Оттук, използвайки очевидните начални условия $A(1) = 1$, $A(2) = 2$, получаваме, че първите членове на редицата $(A(n))_{n\geq 1}$ са

$$1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610, 1597, 4181, 5778, 9959$$

откъдето $n = 13$.

Забележка. Пресмятанията могат да се упростят, ако забележим, че

$$A(n+1) = 3A(n) - A(n-1).$$

Може да се докаже, че получената редица е подредица на редицата на Фибоначи и се състои от членовете с нечетен индекс.

Задача 9.4. На дъската е написано естествено число. Всяка секунда отдясно към него се дописва цифра, различна от 9. Да се докаже, че след краен брой стъпки на дъската ще се появи съставно число.

Решение. Ясно е, че ако се дописва някоя от цифрите 0,2,4,5,6 или 8 веднага на дъската ще се появи съставно число. При дописване на цифрите 1 или 7 остатъкът от деление на 3 на полученото число ще се увеличи с 1, т.е. след една или две стъпки ще получим число, кратно на 3. Остава да разгледаме случая, при който от дадено място нататък се дописва само цифрата 3. Нека на дъската в даден момент е записано простото число p. Без ограничение можем да считаме, че $p > 10$. Ще докажем, че съществува число, десетичният запис на което се състои само от цифрата 3 и което е кратно на p. За целта разглеждаме числата $3, 33, 333, \ldots, 33...3$ (последното с $p+1$ цифри). От принципа на Дирихле следва че две от тях са с равни остатъци при деление с p. Тъй като тяхната разлика е число, записано само с цифрата 3 и след това само с нули, а p и 10 са взаимно прости, то частта от разликата, която е записана само с цифрата 3 ще се дели на p. Ясно е тогава, че ако след числото p се добавят толкова пъти цифрата 3, колкото е в числото, за което се видя, че се дели на p , то на дъската ще се появи число, кратно на това просто число p, с което задачата е решена.