Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически цъстезания
Бургас, 6 - 8 февруари 2009 г.

Тема за 12 клас

Кратки решения на задачите

Задача 12.1. Редицата $x_1, x_2, \dots$ е дефинирана с равенствата $x_1 = 2$ и $x_{n+1} = \dfrac{1+2x_n}{2+x_n}$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:

а) редицата с общ член $\dfrac{1}{1+x_n} - \dfrac{1}{2}$ е геометрична прогресия и да се намери нейното частно;

б) редицата с общ член $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+x_1} + \cdots + \dfrac{1}{1+x_n}\right)$ е сходяща и да се намери нейната граница.

Решение. а) Ако $y_n = \dfrac{1}{1+x_n} - \dfrac{1}{2}$, то

$$y_{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1+2x_n}{2+x_n}} - \frac{1}{2} = \frac{1-x_n}{6(1+x_n)} = \frac{y_n}{3}$$

и следователно редицата (y_n) е геометрична прогресия с частно $\dfrac{1}{3}$ (и първи член $-\dfrac{1}{6}$).

б) От а) следва, че

$$z_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+x_1} + \cdots + \frac{1}{1+x_n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6n} \cdot \frac{1-1/3^n}{1-1/3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

и значи $\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{2}$.

Задача 12.2. Нека $ABCD$ е вписан в окръжност четириъгълник. Точка E върху лъча $DA^{\rightarrow}$ е такава, че $\angle ABC = 2\angle EBD$. Да се докаже, че

$$DE = \frac{AC.BD}{AB+BC}.$$

Първо решение. Нека F е такава точка върху правата AD, че $\angle ABF = \angle CBD$ и A е между D и F. Понеже $\angle BAF = \angle BCD$, то $\triangle ABF \sim \triangle CBD$. Следователно (1) $\dfrac{BF}{BD} = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AF}{CD}$. От друга страна, от $\angle ABC = 2\angle EBD$ следва, че BE е ъглополовяща на $\angle FBD$ и значи (2) $\frac{BF}{BD} = \frac{EF}{ED}$. От (1) и (2) получаваме, че

$$\frac{AB}{CB} = \frac{EF}{ED} = \frac{AF + AD - DE}{DE} = \frac{AB.CD + BC.(AD - DE)}{BC.DE}.$$

Оттук и теоремата на Птоломей следва, че

$$DE(AB + BC) = AB.CD + BC.AD = AC.BD.$$

Второ решение. Нека $\angle ABC = \beta$, $\angle EBD = \varphi$ и $\angle ADB = \psi$. От синусовата теорема имаме, че

$$\frac{DE}{BD} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}, \quad \frac{AC}{AB+BC} = \frac{\sin\beta}{\sin\psi + \sin(\beta+\psi)}.$$

Следователно

$$DE = \frac{AC.BD}{AB+BC} \Leftrightarrow \sin\varphi(\sin\psi + \sin(\beta+\psi)) = \sin\beta\sin(\varphi+\psi)$$

$$\Leftrightarrow \sin\varphi(\sin\psi + \sin\beta\cos\psi + \cos\beta\sin\psi) = \sin\beta(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)$$

$$\Leftrightarrow \sin\varphi(1+\cos\beta) = \sin\beta\cos\varphi \Leftrightarrow \tan\varphi = \tan\beta/2 \Leftrightarrow \varphi = \beta/2.$$

Задача 12.3. Да се намерят всички полиноми P с реални коефициенти такива, че $P(x-1)P(x+1) > P^2(x) - 1$ за произволно реално число x.

Решение. Да допуснем, че $\deg P = n \geq 2$ и нека $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots$, $a_0 \neq 0$. Тогава

$$P(x\pm1) = a_0(x\pm1)^n + a_1(x\pm1)^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots$$

$$= a_0x^n + (a_1 \pm na_0)x^{n-1} + (a_2 \pm na_1 + n(n-1)a_0/2)x^{n-2} + \dots$$

и следователно

$$P(x-1)P(x+1) = a_0^2x^{2n} + 2a_0a_1x^{2n-1} + (a_1^2 + 2a_0a_2 - na_0^2)x^{2n-2} + \dots.$$

От друга страна,

$$P^2(x) = a_0^2x^{2n} + 2a_0a_1x^{2n-1} + (a_1^2 + 2a_0a_2)x^{2n-2} + \dots$$

и значи

$$1 > P^2(x) - P(x-1)P(x+1) = na_0^2x^{2n-2} + \dots.$$

Последното обаче не е вярно за всяко достатъчно голямо x, което е противоречие. Следователно $P(x) = ax + b$ и тогава $1 > P^2(x) - P(x-1)P(x+1) = a^2$, откъдето $a \in (-1, 1)$.

Задача 12.4. Да се намерят всички естествени числа a, b, c, за които уравнението $(x+y)^a(x^2+y^2)^b = 8(xy)^c$ има безбройно много решения в естествени числа.

Решение. Първо ще докажем, че ако (x, y) е решение на уравнението, то $x = y$.

Нека $a + b \geq 3$. От неравенствата $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ и $x^2 + y^2 \geq 2xy$ следва, че

$$8(xy)^c = (x+y)^a(x^2+y^2)^b \geq 2^{a+b}(xy)^{a/2+b} \geq 8(xy)^{a/2+b}.$$

Можем да считаме, че $xy > 1$ (иначе $x = y = 1$) и следователно $2c \geq a + 2b$. Нека $d = (x, y)$, $x = dx_1$, $y = dy_1$, като $(x_1, y_1) = 1$. Заместваме в даденото уравнение и получаваме

$$(x_1+y_1)^a(x_1^2+y_1^2)^b = 8d^{2c-a-2b}(x_1y_1)^c.$$

Тъй като $2c - a - 2b \geq 0$, следва, че x_1y_1 дели $(x_1+y_1)((x_1+y_1)^2 - 2x_1y_1)$. Това е невъзможно при $x_1y_1 > 1$, защото ако например $x_1 > 1$ и p е прост делител на x_1, то p дели $x_1 + y_1$, т.е. p дели y_1, което противоречи на $(x_1, y_1) = 1$. Следователно $x_1 = y_1$ и $x = y$.

Нека сега $a = b = 1$. Тогава $(x+y)(x^2+y^2) = 8(xy)^c$ и ако $c \geq 2$, както по-горе следва, че $x = y$. При $c = 1$ получаваме, че

$$8xy = (x+y)(x^2+y^2) \geq 2\sqrt{xy}2xy.$$

Оттук $xy \leq 4$ и лесно се вижда, че $x = y = 2$

От доказаното следва, че a, b, c имат исканото свойство тогава и само тогава, когато съществуват безбройно много естествени числа x, за които

$$(2x)^a(2x^2)^b = 8(x^2)^c,$$

т.е. $2^{a+b-3}x^{a+2b-2c} = 1$. Оттук $a + b = 3$, $a + 2b = 2c$ и значи $a = c = 2$, $b = 1$.

Задачите са предложени от:

Петър Бойваленков - 10.2., 10.3; Иван Тонов - 9.4.; Стоян Боев - 9.2., 10.1., 10.4.; Иван Ланджев - 9.3.; Керопе Чакърян - 9.1.; Александър Иванов - 11.2, 11.3; Емил Колев - 11.1, 11.4; Николай Николов - 12.2, 12.3; Олег Мушкаров - 12.1, 12.4.

Брошурата е подготвена от Емил Колев, Петър Бойваленков, Иван Ланджев и Николай Николов