Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически цъстезания
Бургас, 6 - 8 февруари 2009 г.

Тема за 11 клас
Кратки решения на задачите

Задача 11.1. Дадени са аритметична прогресия с първи член a_1 и разлика $d \neq 0$ и геометрична прогресия с първи член b_1 и частно q. Ако $a_1 + b_1 = d + 2a_1 = 0$ и сборът на първите 4 члена на геометричната прогресия е равен на сборът на първите 5 члена на аритметичната прогресия, да се намери частното на геометричната прогресия.

Решение. От формулите за сбор на първите n члена на аритметична и геометрична прогресия и от условието получаваме $b_1(q^3 + q^2 + q + 1) = (a_1 + 2d)5$. След заместване $d = -2a_1$, $b_1 = a_1$ и съкращаване на b_1 (тъй като $d \neq 0$, то $b_1 \neq 0$), получаваме $q^3 + q^2 + q - 14 = 0$. Последното уравнение е еквивалентно на $(q-2)(q^2 + 3q + 7) = 0$ и понеже $q^2 + 3q + 7 > 0$, то $q = 2$.

Задача 11.2. Да се реши системата:

$$\left|\begin{array}{l} \cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - \cos(\pi yz) + 1 = 0 \\ x^2y^2z + z + 10 = 0 \end{array}\right.$$

Решение. Понеже $\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \geq 0$ и $1 - \cos(\pi yz) \geq 0$, то първото уравнение е изпълнено точно когато $\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = 0$ и $\cos(\pi yz) = 1$. Оттук следва, че $x = 2p + 1$ и $yz = 2q$, където p и q са цели числа. Нека $q = 0$. Тъй като от второто уравнение имаме, че $z \neq 0$, то намираме $y = 0$. Сега от второто уравнение получаваме $z = -10$. В този случай решенията са $(x, y, z) = (2p + 1, 0, -10)$, където p е произволно цяло число.

Нека сега $q \neq 0$. След заместване $x = 2p + 1$ и $y = \dfrac{2q}{z}$, получаваме $z^2 + 10z + 4(2p+1)^2q^2 = 0$. Това уравнение има решение когато $25 - 4(2p+1)^2q^2 \geq 0$, т.е. $(2(2p+1)q)^2 \leq 25$. Оттук следва, че $|2p + 1| = 1$ и $q = \pm 1$ или $q = \pm 2$. В този случай решенията са

$$(x, y, z) = \left(\pm 1, \frac{2q}{-5 \pm \sqrt{25 - 4q^2}}, -5 \pm \sqrt{25 - 4q^2}\right),$$

където $q = \pm 1$ или $q = \pm 2$.

Задача 11.3. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с център на описаната окръжност точка O. Върху отсечките BO и CO са избрани съответно точки M и N така, че $OM = CN$. Точки P и Q са такива, че $\triangle AMP$ и $\triangle ANQ$ са подобни и еднакво ориентирани съответно на $\triangle AOC$ и $\triangle AOB$. Да се докаже, че сборът $PN + QM$ не зависи от избора на точките M и N.

Решение. От $\triangle AMP \sim \triangle AOC$ следва, че $\sphericalangle MAP = \sphericalangle OAC$, което означава, че лъчът $AP^{\rightarrow}$ пресича отсечката OC и че $\sphericalangle MAO = \sphericalangle PAC$. От същото подобие намираме $\dfrac{AM}{AO} = \dfrac{AP}{AC}$, което заедно с $\sphericalangle MAO = \sphericalangle PAC$ означава, че $\triangle AMO \sim \triangle APC$. Оттук следва, че $\sphericalangle ACP = 2 \sphericalangle ACB$, т.е. $\sphericalangle BCP = \sphericalangle ACB$. Аналогично получаваме, че $\sphericalangle CBQ = \sphericalangle ABC$. Да означим пресечната точка на CP и BQ с R (R е симетричната на върха A спрямо правата BC). От $\triangle ABC \cong \triangle RBC$ и от $\triangle AMO \sim \triangle APC$ намираме

$$\frac{CR}{CP} = \frac{CA}{CP} = \frac{AO}{OM} = \frac{CO}{CN},$$

което означава, че $PN \parallel RO$ и $\dfrac{PN}{RO} = \dfrac{CN}{CO}$. Аналогично намираме, че $QM \parallel RO$ и $\dfrac{QM}{RO} = \dfrac{BM}{BO}$. Следователно $\dfrac{PN + QM}{RO} = \dfrac{CN}{CO} + \dfrac{BM}{BO} = 1$, т.е. $PN + QM = RO$, като дължината на RO не зависи от избора на точките M и N.

Задача 11.4. Нека A е множество с $n \geq 5$ елемента. Да се намери минималното естествено число m със следното свойство: За всеки 10 триелементни подмножества на A съществува оцветяване на елементите на A в m цвята така, че никое от избраните триелементни подмножества на A не съдържа три едноцветни елемента.

Решение. Да изберем произволни 5 елемента от A и да образуваме всичките $\binom{5}{2} =$ 10 триелементни подмножества. Ако сме използвали само два цвята, то ще има едноцветно триелементно подмножество. Следователно $m \geq 3$. Ще покажем, че 3 цвята са достатъчни. При $n \leq 6$ е достатъчно да оцветим елементите на A така, че да няма три едноцветни елемента.

При $n = 7$ е достатъчно да изберем три елемента, които не образуват някое от избраните множества (поради $\binom{7}{2} = 21 > 10$ това е възможно) и да ги оцветим в първия цвят. В другите два цвята оцветяваме по 2 от останалите 4 елемента.

Нека $8 \leq n \leq 10$. Ще покажем, че съществува подмножество на A с $n-5$ елемента в което не се съдържа никое от избраните 10 триелементни подмножества. Всички $n-5$ елементни подмножества на A са $\binom{n}{n-5}$, докато едно триелементно подмножество "покрива" точно $\binom{n-3}{n-8}$ такива $n-5$ елементни подмножества. Тъй като $\binom{n}{n-5} > 10\binom{n-3}{n-8}$, за $8 \leq n \leq 10$, то получаваме исканото.

Да оцветим елементите на това $n-5$ елементно множество в първия цвят. Ако в останалите 5 елемента има триелементо подмножество, което не е измежду избраните, го оцветяваме във втория цвят, а останалите два елемента оцветяваме в третия цвят.

Ако всички триелементни подмножества измежду останалите 5 елемента са избрани, то задачата се свежда до случая $n = 5$.

Нека $n \geq 11$. Тъй като в десетте триелементни подмножества елементите на A се срещат с повторения общо 30 пъти, то съществува елемент $a \in A$, който се среща не повече от два пъти. Да разгледаме множеството $A \setminus \{a\}$ и всички триелементни подмножества, които не съдържат a. От доказаното по-горе следва, че можем да оцветим това множество в три цвята така, че да няма едноцветно триелементно множество. За елемента a има най-много два забранени цвята (онези, които правят двете множества в които участва a, едноцветни), т.е. a също може да бъде оцветен без да има едноцветно подмножесто.