**Министерство на образованието и науката**
**Съюз на математиците в България**

---

**Зимни математически цъстезания**
**Бургас, 6 - 8 февруари 2009 г.**

**Тема за 10 клас**
**Кратки решения на задачите**

**Задача 10.1.** Дадено е уравнението

$$(x^2+6x+1)^2+(m+7)(x^2+6x+1)+m^2+7=0,$$

където $m$ е реален параметър.

а) Да се определи колко реални решения има уравнението при $m=4$.

б) Да се намерят стойностите на параметъра $m$, за които уравнението има точно три различни реални решения.



**Решение.** Полагаме $t=x^2+6x+1$ и уравнението добива вида $t^2+(m+7)t+m^2+7=0$.

а) При $m=4$ получаваме $t^2+11t+23=0$, откъдето $t_{1,2}=\dfrac{-11\pm\sqrt{29}}{2}$. Тъй като най-малката стойност на функцията $f(x)=x^2+6x+1$ е $f(-3)=-8$ и $\dfrac{-11+\sqrt{29}}{2}>-8$, $\dfrac{-11-\sqrt{29}}{2}<-8$, то уравнението има две реални решения.

б) Необходимо условие за това е уравнението $t^2+(m+7)t+m^2+7=0$ да има решение $t_0$, такова че уравнението $x^2+6x+1-t_0=0$ има единствено решение. С други думи $D=32+4t_0=0$, т.е. $t_0=-8$. Като заместим в $t^2+(m+7)t+m^2+7=0$, достигаме до $m^2-8m+15=0\Leftrightarrow(m-3)(m-5)=0$.

- При $m=3$ получаваме решенията $-3;-3\pm\sqrt{6}$
- При $m=5$ получаваме решенията $-3;\ -1$ и $-5$

**Задача 10.2.** Да се реши уравнението

$$\sqrt{x-2}+2\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{(x^2-4)(x^2-x-1)}.$$

**Решение.** *Първи начин.* Уравнението има смисъл при $x\ge 2$. Лесно се вижда, че $x=2$ е решение. Нека $x\in(2,+\infty)$ и да разделим двете страни на $\sqrt{x-2}$ – получаваме уравнението $1+2\sqrt{x+1}=\sqrt{x^3+x^2-3x-2}$.

Лесно се вижда, че $x=3$ също е решение на разглежданото уравнение. Имаме $x^3+x^2-3x-2=x^2(x+1)-3x-2>9(x+1)-3x-2=6x+7$ при $x>3$ и аналогично $x^3+x^2-3x-2<6x+7$ при $x\in(2,3)$. Освен това $\sqrt{6x+7}>1+2\sqrt{x+1}$ при $x>3$ и $\sqrt{6x+7}<1+2\sqrt{x+1}$ при $x\in(2,3)$. Следователно разглежданото уравнение няма решения, различни от 2 и 3.

*Втори начин.* Повдигаме на квадрат уравнението $1+2\sqrt{x+1}=\sqrt{x^3+x^2-3x-2}$ и получаваме $4\sqrt{x+1}=x^3+x^2-7x-7$, откъдето имаме $4=(x^2-7)\sqrt{x+1}$. Тъй като дясната страна е по-малка от 4 при $x\in(2,3)$ и по-голяма от 4 при $x>3$, заключаваме, че $x=3$.

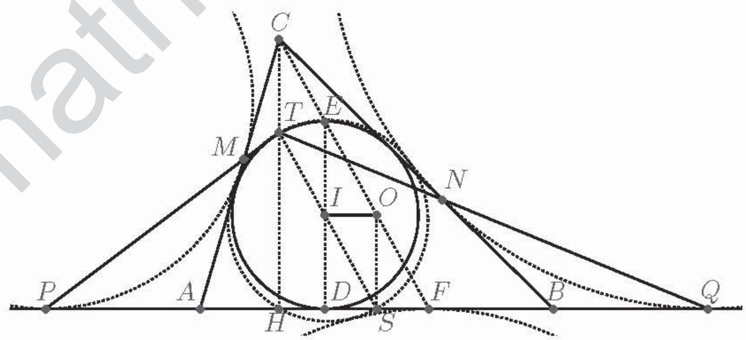
**Задача 10.3.** Да се докаже, че измежду числата $1, 2, 3, \ldots, 1000$ повече са тези, които се представят във вида $3u^2 - 4v^2$, отколкото тези, които се представят във вида $28xy - x^2 - 4y^2$, където $u$, $v$, $x$ и $y$ са цели числа.

**Решение.** От представянето $3(x+2y)^2 - 4(x-2y)^2 = 28xy - x^2 - 4y^2$ следва, че всяко число, което се представя във вида $28xy - x^2 - 4y^2$ ($x$, $y$ са цели), се представя и във вида $3u^2 - 4v^2$ ($u$, $v$ са цели). Следователно е достатъчно да посочим естествено число, по-малко от 1000, което има вида $3u^2 - 4v^2$, но не се представя във вида $28xy - x^2 - 4y^2$.

Едно такова число е 11. Имаме $11 = 3.3^2 - 4.2^2$, а уравнението $28xy - x^2 - 4y^2 = 11$ няма решение в цели числа. Действително, равенството $32xy - (x+2y)^2 = 11$ е невъзможно по модул 8.

**Задача 10.4.** Външновписаните окръжности към страните $AC$ и $BC$ на $\triangle ABC$ допират страните $AC$ и $BC$ съответно в точките $M$ и $N$, а продълженията на страната $AB$ съответно в точките $P$ и $Q$. Ако пресечната точка $T$ на правите $PM$ и $QN$ лежи на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, то да се докаже, че $T$ лежи на окръжността минаваща през средите на страните на триъгълника.

**Решение.** Нека $k$ е вписаната в $\triangle ABC$ окръжност с център $I$, $D$ е допирната точка на $k$ със страната $AB$, $E$ е диаметрално противоположната точка на $D$ в $k$, $H = CT^{\rightarrow} \cap AB$ и $S$ е средата на $AB$.




Първо ще покажем, че $CH \perp AB$. Тъй като $\triangle PQT \sim \triangle ABI$ (защо?) е достатъчно да докажем, че $PH : QH = AD : BD$. Като приложим теоремата на Менелай за $\triangle AHC$ и правата $(PMT)$, както и за $\triangle BHC$ и правата $(QNT)$, получаваме

$$\frac{HT}{TC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AP}{PH} = 1 = \frac{HT}{TC} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BQ}{QH}$$

и от $AD = CM, BD = CN$, достигаме до $PH : QH = AD : BD$. Следователно $CH \perp AB$ т.е. $CH \parallel ED$ **(1)**

От $\triangle PQT \sim \triangle ABI$ и факта, че $S$ е среда както на $AB$, така и на $PQ$, следва, че точките $T$, $I$ и $S$ са колинеарни. Ако точка $F = CE^{\rightarrow} \cap AB$, то точка $F$ е допирната точка на външновписаната към страната $AB$ окръжност (защо?). Така $S$ е среда и на отсечката $DF$, $SI$ е средна отсечка в $\triangle DEF$,т.е $ST \parallel CF$ **(2)**

От **(1)** и **(2)**, и $IT = IE$, следва, че $TIEC$ е ромб. Тогава $CI$ разполовява ъгъл $\angle TCE$, но $CI$ разполовява и ъгъл $\angle TCO$, където $O$ е центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Така $O \in CE^{\rightarrow}$.

От $OS \perp AB$ следва, че $CTSO$ е успоредник и $ST = OC = R$. Остава да съобразим, че окръжността минаваща през средите на страните на триъгълника, минава и през точка $H$ и освен това нейният диаметър е точно $R$, т.е. минава и през точката $T$.

*Забележки:*

1. Характеризиращо свойство е $OI \parallel AB$, което е еквивалентно на $\cos\alpha + \cos\beta = 1$

2. Окръжността минаваща през средите на страните на триъгълника е т.нар. окръжност на Ойлер или на деветте точки. От Теоремата на Фойербах знаем, че тя се допира до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. В случая точката на допиране е точно $T$.