КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

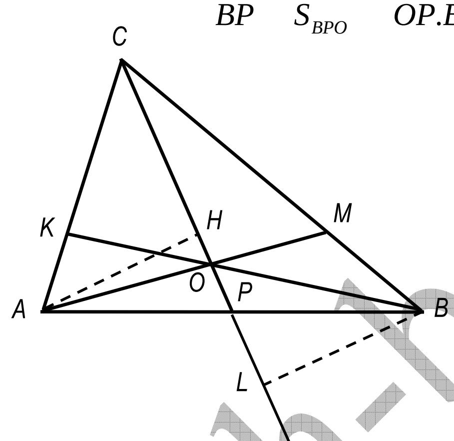
Тема за 8 клас

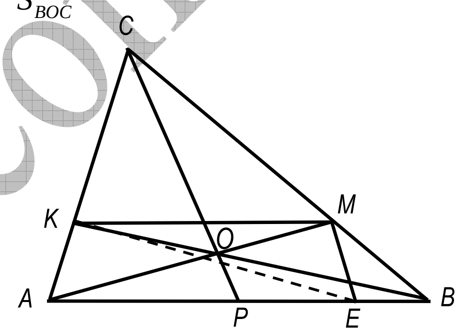
Задача 1. Точка *O* лежи на медианата *CP* ($P \in AB$) на остроъгълния триъгълник *ABC* (*AC* < *BC*), а правите *AO* и *BO* пресичат страните *BC* и *CA* съответно в точки *M* и *K*. Да се докаже, че:

а) *MK* е успоредна на *AB*; б) *AM* < *BK*.

***Решение*:** Ще използваме факта, че ако O е произволна вътрешна точка в ΔABC и правите AO, BO и CO пресичат съответно страните BC, AC и AB в точки M, K и P, то $S_{AOC} : S_{BOC} = AP : BP$. Наистина, ако H и L са петите на перпендикулярите към правата CP съответно от върховете A и B, то

$$\frac{AP}{BP} = \frac{S_{APO}}{S_{BPO}} = \frac{OP.AH}{OP.BL} = \frac{CO.AH}{CO.BL} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}$$





а) В конкретния случай на разглежданата задача имаме допълнително, че $S_{AOC} = S_{BOC}$, защото CP е медиана. Тогава $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{BM}{CM}$ **(1 т.)**. Ако $AK = x$ и $KC = y$, лесно получаваме, че лицето на ΔAOK се отнася към лицето на ΔABC както $\frac{x}{x+y}$, а значи (заради доказаното) и лицето на ΔBOM се отнася към лицето на ΔABC както $\frac{x}{x+y}$. Заключаваме, че $S_{AOK} = S_{BOM}$ **(1 т.)** и следователно четириъгълникът $ABMK$ е трапец, т.е. $KM \parallel AB$ **(1 т.)**.

б) Построяваме равнобедрения трапец *AEMK* (вж. чертежа). Точка *E* лежи на отсечката AB, защото $\angle KAE = \Delta AEM$ е по-голям от $\angle ABC$ (*AC* < *BC*) **(1 т.)**. Диагоналите *AM* и *KE* на равнобедрения трапец *AEMK* са равни **(1 т.)**. Освен това $\angle KEA$ е остър, защото е част от остър $\angle AEM$ ($= \angle KAE$. Следователно $\angle KEB$ е тъп и за страните на ΔBEK е в сила *BK* > *KE* = *AM* **(1 т.)**.

***Забележка.* Изискването за остроъгълен триъгълник е направено само за да избегнем разглеждането на втори случай в подточка б).**

Задача 2. Да се намерят всички стойности на реалния параметър k така, че за всеки три реални числа a, b и c, за които $ab+bc+ca=0$ и $a^2 \neq kbc, b^2 \neq kac, c^2 \neq kab$, е вярно равенството $\dfrac{1}{a^2-kbc}+\dfrac{1}{b^2-kac}+\dfrac{1}{c^2-kab}=0$.

Решение: Да изберем $a=1, b=-2, c=-2$. Тогава $ab+bc+ca=0$, но трябва и $k \neq \dfrac{1}{4}, -2$. Равенството $\dfrac{1}{a^2-kbc}+\dfrac{1}{b^2-kac}+\dfrac{1}{c^2-kab}=0$ можем да запишем във вида $\dfrac{1}{1-4k}+\dfrac{1}{2+k}=0 \Rightarrow \dfrac{1}{2+k}=\dfrac{1}{4k-1} \Rightarrow 2+k=4k-1 \Rightarrow k=1$. Следователно само $k=\dfrac{1}{4}, -2, 1$ могат да бъдат решения на задачата **(1 т.)**. Ако изберем $a=3, b=-2, c=6$, то изразът $\dfrac{1}{a^2-kbc}+\dfrac{1}{b^2-kac}+\dfrac{1}{c^2-kab}$ ще приеме вида $\dfrac{1}{9+12k}+\dfrac{1}{4-18k}+\dfrac{1}{36+6k}$ и ще е равен на нула само при $k=-2$ и $k=1$ **(1 т.)**. Да докажем сега, че тези две стойности на k са решения на задачата. От $ab+bc+ca=0$ следва, че $-bc=ab+ca$. Оттук при $k=1$ $\dfrac{1}{a^2-bc}=\dfrac{1}{a^2+ab+ac}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{a+b+c}$ **(1 т.)**. Аналогично $\dfrac{1}{b^2-ac}=\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{a+b+c}$ и $\dfrac{1}{c^2-ab}=\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{1}{a+b+c}$, откъдето $\dfrac{1}{a^2-bc}+\dfrac{1}{b^2-ac}+\dfrac{1}{c^2-ab}=\dfrac{1}{a+b+c}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$. Но $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=0$, откъдето следва исканото **(1 т.)**.

При $k=-2$ за знаменателя на първата дроб имаме $a^2+2bc=a^2+bc-ac-ab=(a-b)(a-c)$ и аналогично за другите знаменатели **(1 т.)**. Оттук

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{(b-c)+(c-a)+(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$$ **(1 т.)**.

Задача 3. Да се реши в естествени числа уравнението $(xy-6)^2+16=x^2+4y^2$.

Решение: Разкриваме скобите и добавяме $4xy$:

$$x^2y^2-8xy+36+16=x^2+4xy+4y^2$$
$$(xy-4)^2+36=(x+2y)^2$$
$$(x+2y)^2-(xy-4)^2=36$$
$$(x+2y+xy-4)(x+2y-xy+4)=36$$ **(1 т.)**.

Числата в двете скоби имат еднаква четност, така че имаме следните случаи **(1 т.)**:

<u>Случай A</u> **(1 т.)** $x+2y+xy-4=18$
$x+2y-xy+4=2$.

Оттук $x+2y=10$, $xy-4=8$, $xy=12$, в което заместваме $x=10-2y$ и получаваме $(10-2y)y=12$. Решенията на полученото уравнение са $y=2$ и $y=3$. Съответно $x=6$ и $x=4$.

Случай Б **(1 т.)** $x + 2y + xy - 4 = 6$

$x + 2y - xy + 4 = 6.$

Оттук $x + 2y = 6$, $xy - 4 = 0$, $xy = 4$, в което заместваме $x = 6 - 2y$ и получаваме $(6 - 2y)y = 4$. Решенията на полученото уравнение са $y = 2$ и $y = 1$. Съответно $x = 2$ и $x = 4$.

Случай В **(1 т.)** $x + 2y + xy - 4 = 2$

$x + 2y - xy + 4 = 18.$

Оттук $x + 2y = 10$, $xy - 4 = -8$, $xy = -4$, което е невъзможно.

Окончателно решенията за $(x; y)$ са (6;2), (4;3), (2;2), (4;1)

(По 0,5 т. за всяко вярно намерено решение. Задачата допуска и други подходи, при които схемата за оценяване се адаптира по съответен начин.)

Задача 4. Да се намерят две последователни цели числа, между квадратите на които е заключено числото

$$A = \frac{2.4.6...2008}{1.3.5...2007}.$$

Решение: Нека $B = \dfrac{3.5...2007.2009}{2.4...2006.2008}$. Като използваме, че $\dfrac{k}{k-1} > \dfrac{k+1}{k}$ за всяко $k > 1$, лесно получаваме, че $A > B$. Ще подобрим това неравенство, като потърсим число $a < 1$ така, че $aA > B$. Числото a определяме от условието $\dfrac{2}{1}.\dfrac{4}{3}.a = \dfrac{3}{2}.\dfrac{5}{4}$, т.е. $a = \dfrac{45}{64}$. Понеже $A = \dfrac{2009}{B}$, от неравенството $aA > B$ намираме $aA^2 > A.B = 2009$, т.е. $A^2 > \dfrac{2009}{a} = \dfrac{2009.64}{45}$. Но $\dfrac{2009.64}{45} > 49^2$ и следователно $A > 49 = 7^2$. От друга страна $\dfrac{3}{2} > \dfrac{4}{3}$, $\dfrac{5}{4} > \dfrac{6}{5}$, … , $\dfrac{2007}{2006} > \dfrac{2008}{2007}$ и следователно $\dfrac{2008}{2009}.B > \dfrac{A}{2}$. Както по-горе получаваме $A^2 < 2008.2 = 4016 < 4096 = 64^2$, откъдето $A < 64 = 8^2$. Окончателно $7^2 < A < 8^2$ и $(-7)^2 < A < (-8)^2$, т.е. задачата има две решения.

Задачата се оценява с **(7 т.)**, като отделни точки се присъждат за частични резултати. Само отговор без правилни обосновки **(1 т.)**.

Задачите и темите са обсъдени от членовете на Националната комисия по математика 4 – 8 клас в състав:

проф. Сава Гроздев – председател

Емил Карлов и гл. ас. Иван Ангелов – отговорници за 4 клас

ст.н.с. Тони Чехларова и докторант Ирина Шаркова – отговорници за 5 клас

ст.н.с. Борислав Лазаров и ас. Симеон Замковой – отговорници за 6 клас

докторант Светлозар Дойчев – отговорник за 7 клас

ст.н.с. Ивайло Кортезов – отговорник за 8 клас

Автори на задачите са:

Емил Карлов – 4.2, 4.3, 4.4, 5.2, 7.2, 8.1
Иван Ангелов – 5.4
Тони Чехларова – 4.1, 5.1, 6.2, 7.1
Борислав Лазаров – 6.1, 6.3
Светлозар Дойчев – 5.3, 7.4, 8.2
Ивайло Кортезов – 7.3, 8.3
Сава Гроздев – 6.4, 8.4