

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Тема за 7 клас

**Задача 1.** Съществуват ли числа  $a$  и  $b$ , за които равенството  $251(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 2008 = 251(x^2 + 5x + 8)(x^2 + ax + b)$  е тъждество?

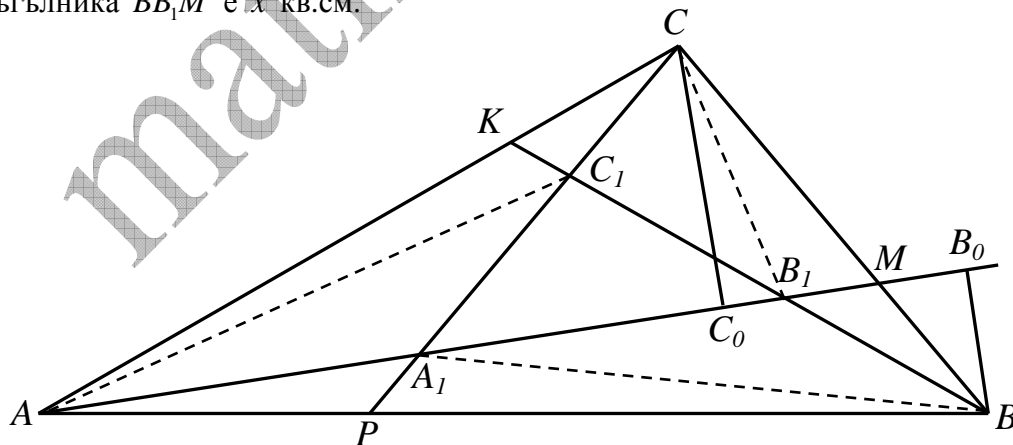
**Решение:** След разделяне на 251 и привеждане на лявата и на дясната страна в нормален вид получаваме:

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 16 = x^4 + (5+a)x^3 + (8+5a+b)x^2 + (8a+5b)x + 8b \quad (3 \text{ т.})$$

От  $10 = 5 + a$  намираме  $a = 5$  (1 т.). От  $35 = 8 + 5a + b$ , след като заместим  $a$  с 5, получаваме  $b = 2$  (1 т.). Проверяваме (проверката е задължителна) дали са равни и останалите съответни коефициенти при така получените стойности за  $a$  и  $b$ . От  $8a + 5b = 50$  и  $8b = 16$  за  $a = 5$  и  $b = 2$  следва, че и останалите съответни коефициенти се изравняват. Следователно при  $a = 5$  и  $b = 2$  равенството е тъждество (1 т.).

**Задача 2.** Точките  $M$ ,  $K$  и  $P$  лежат съответно на страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  на триъгълника  $ABC$ . Отсечките  $AM$  и  $BK$  се пресичат в точката  $B_1$ , отсечките  $BK$  и  $CP$  се пресичат в точката  $C_1$ , а отсечките  $CP$  и  $AM$  се пресичат в точката  $A_1$ . Ако  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  са средите съответно на отсечките  $AB_1$ ,  $BC_1$  и  $CA_1$ , да се намери отношението  $BM : MC$ .

**Решение:** Нека лицето на триъгълника  $A_1B_1C_1$  е равно на  $3s$  кв.см, а лицето на триъгълника  $BB_1M$  е  $x$  кв.см.



Медианите  $C_1A_1$ ,  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$  делят съответно лицата на триъгълниците  $AB_1C_1$ ,  $BC_1A_1$  и  $CA_1B$  на две равни части, като всяка част има лице  $3s$  кв.см. (лицето на едната половина е постоянно равно на лицето на триъгълника  $A_1B_1C_1$ ) (1 т.). Медианите  $AC_1$ ,  $BA_1$  и  $CB_1$  делят лицата съответно на триъгълниците  $AA_1C$ ,  $BB_1A$  и  $CC_1B$  на две равни части, като всяка част е с лице  $3s$  кв.см (1 т.). Оттук следва, че триъгълникът  $AB_1B$  има лице  $6s$  кв.см, а триъгълникът  $AB_1C$  има лице  $12s$

кв.см. Тъй като двата триъгълника имат обща страна  $AB_1$ , то височината  $BB_0$  ( $B_0 \in AM$ ) е

два пъти по-малка от височината  $CC_0$  ( $C_0 \in AM$ ) **(1 т.)**. Триъгълникът  $CB_1M$  е с лице  $(3s - x)$  кв.см и има два пъти по-голямо лице от лицето на триъгълника  $BB_1M$  **(1 т.)** (защото за двете височини е изпълнено  $CC_0 = 2BB_0$ , а страната  $B_1M$  е обща за двата триъгълника). Заклучаваме, че  $x = s$  **(1 т.)**. Като използваме, че тези два триъгълника имат обща височина от върха  $B_1$ , намираме  $BM : MC = s : 2s = \frac{1}{2}$  **(1 т.)**.

**Задача 3.** Дадена е квадратна таблица  $2008 \times 2008$ , разделена на клетки  $(1 \times 1)$ . Какъв е най-малкият брой клетки, които трябва да се изрежат от таблицата така, че от останалата част да не може да се изреже:

- правоъгълник от три клетки;
- група от една клетка и две съседни на нея клетки?

**Забележка.** Съседни наричаме клетките с обща страна.

**Решение:** а) Да оцветим таблицата в три цвята по следния начин **(1 т.)**:

1	2	3	1	2	...
2	3	1	2	3	...
3	1	2	3	1	...
1	2	3	1	2	...
2	3	1	2	3	...
...	...	...	...	...	...

При това оцветяване има  $\frac{2009 \cdot 2007}{3} = 1344021$  клетки в цвят 2, още толкова в цвят

3 и с една повече в цвят 1 **(1 т.)**. Понеже всеки правоъгълник  $3 \times 1$  покрива полета от трите цвята, достатъчно е да изрежем всички полета от цвят 2 **(1 т.)**. От друга страна, таблицата може да се разреже на  $1344021$  правоъгълника  $3 \times 1$  и една клетка (по редове отляво надясно, а последната колона отгоре надолу). Така че, ако изрежем по-малко от  $1344021$  клетки, поне един от тези правоъгълници ще остане непокътнат **(1 т.)**.

**Отговор:** 1344021.

б) Да разделим таблицата на квадрати  $2 \times 2$  **(1 т.)**. Ако от някой квадрат е изрязана не повече от една клетка, то от него ще остане (или ще може да се изреже) ъгълче от три клетки. Така, от всеки квадрат  $2 \times 2$  трябва да липсват поне две клетки, т.е. трябва да изрежем поне половината клетки **(1 т.)**. Една възможна реализация е да оцветим таблицата шахматно и да изрежем черните полета.

**Отговор:**  $2008 \cdot 1004 = 2016032$ . **(1 т.)**

**Задача 4.** Във всяка от деветте клетки на квадратна таблица с три реда и три стълба е записано по едно естествено число, като и деветте записани числа са различни. Известно е, че произведението на числата във всеки ред на таблицата е точен квадрат, а произведението на числата във всеки стълб е точен куб. Да се намери най-малката възможна стойност на най-голямото от деветте числа, записани в таблицата.

**Решение:** Нека  $P$  е произведението на числата в таблицата. От една страна  $P$  трябва да е точен квадрат, защото е произведение на трите произведения от редовете на таблицата, а от друга страна трябва да е точен куб, защото е произведение на трите произведения от трите стълба на таблицата. Оттук следва, че  $P$  трябва да е точна шеста степен на естествено число **(1 т.)**. Нека  $P = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ,  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  е каноничното разлагане на прости множители на това число. Понеже  $P$  е точна шеста степен на естествено число, то всеки от степенните показатели  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  трябва да е кратен на 6. Да допуснем, че  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  не са първите  $k$  прости числа. Нека  $q$  е просто число измежду първите  $k$  прости числа, различно от  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Ако при всички измежду деветте числа, в чиито разлагания участва  $p_k$ , заменим в техните разлагания  $p_k$  с  $q$ , ще получим нова таблица, в която някои от числата са станали по-малки, а други са останали евентуално същите. При това новата таблица ще има свойството от условието на задачата. Извършвайки описаната замяна необходимия брой пъти, ще достигнем до ситуация с таблица, в която  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  са първите  $k$  прости числа и която има свойството от задачата. При това максималният елемент в новата таблица не е по-голям от този в първоначално разглежданата. Ето защо без ограничение на общността на разсъжденията можем да предполагаме, че  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  са първите  $k$  прости числа **(1 т.)**. Сега ще разгледаме няколко случая в зависимост от  $k$ .

**Първи случай:**  $k = 1$ . Тогава всичките девет числа в таблицата трябва да са степени на двойката и максималният елемент в таблицата е най-малко  $2^8$  **(1 т.)**. (може лесно да се построи пример на таблица, в която този елемент е точно  $2^8$ ).

**Втори случай:**  $k = 2$ . Тогава всичките девет числа в таблицата ще имат вида  $2^\alpha 3^\beta$ ,  $0 \leq \alpha, 0 \leq \beta$ . Първите девет естествени числа от този вида са 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16 и тяхното произведение е равно на

$$1.2.3.4.6.8.9.12.16 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 2^2 \cdot 2.3 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2^4 = 2^{13} \cdot 3^5,$$

което не е точна шеста степен на естествено число **(1 т.)**. Следователно е невъзможно да образуваме желаната таблица с тези девет числа. Следващото по големина число от вида  $2^\alpha 3^\beta$ ,  $0 \leq \alpha, 0 \leq \beta$  е 18. Ако покажем, че е възможно да получим таблица с някои девет от десетте числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16 и 18 (като е ясно, че трябва 18 задължително да участва), ще следва, че в този случай търсената най-малка стойност е 18. Произведението на десетте числа е равно на  $2^{13} \cdot 3^5 \cdot 18 = 2^{14} \cdot 3^7$ , което трябва да разделим на точно едно от десетте числа, за да получим точна шеста степен, т. е. число от вида  $2^{6k} \cdot 3^{6m}$ . Очевидно това е възможно само ако разделим произведението  $2^{14} \cdot 3^7$  на  $2^2 \cdot 3^1 = 12$ . Тогава произведението на деветте числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 16 и 18 е равно на  $2^{12} \cdot 3^6 = (2^2 \cdot 3)^6$ . Да проверим сега, че е възможно да получим таблица с исканите свойства, в която участват числата 1,

2, 3, 4, 6, 8, 9, 16 и 18. Да видим как могат да изглеждат произведенията в стълбовете на таблицата, които трябва да са точни кубове. Ако допуснем, че всяко от тези произведения е кратно на 3, то трябва да е кратно и най-малко на  $3^3$ . Но тогава произведението на всички числа трябва да е кратно най-малко на  $3^9$ , а това не е така. Следователно поне едно от произведенията на стълбовете няма изобщо да съдържа множител 3. Това означава, че в този стълб трябва да има само степени на 2. За да бъде произведението на тези степени на 2 точен куб, е необходимо тези степени да бъдат  $\{1,2,4\}$  или  $\{1,4,16\}$ , или  $\{2,4,8\}$ , или  $\{4,8,16\}$ . Да разгледаме първата възможност. Можем да предполагаме, че в този момент първият стълб на таблицата изглежда така:

4		
2		
1		

Да отбележим по-нататък, че не е възможно някои три от числата 3, 6, 9 и 18 да попаднат в един стълб, защото тогава в другия стълб ще остане едно от тях и в този стълб произведението не може да е точен куб. Тоест, две от числата 3, 6, 9 и 18 трябва да са в единия, а другите две – в другия стълб на таблицата. Да предположим, че в стълба на 18 е 3, а в стълба на 9 е 6. Тогава числото 8 не може да се сложи нито в единия, нито в другия стълб така, че да получим произведения, които са точни кубове. Значи при 18 е 6, а при 9 е 3. Лесно достигаем до извода, че възможното разпределение на числата в стълбовете е  $\{1,2,4\}$ ,  $\{3,8,9\}$  и  $\{6,16,18\}$ . Сега, като използваме, че 1 и 4 са точни квадрати, лесно достигаем до разположение на деветте числа в таблицата, удовлетворяващо условието, а именно:

4	8	18
2	3	6
1	9	16

С това този случай е разгледан и търсената най-малка стойност е 18 (2 т.).

**Трети случай:**  $k \geq 3$ . Сега числото  $P$  се дели на  $5^6$ . Това е възможно само когато в таблицата поне шест числа се делят на 5 или поне едно число се дели най-малко на  $5^2$ . В първия случай (понеже най-малките шест кратни на 5 са 5, 10, 15, 20, 25 и 30) максималният елемент на таблицата ще е поне 30, а във втория случай този максимален елемент ще е поне  $5^2 = 25$ . И в двата случая обаче той ще е по-голям от 18 (1 т.).

В крайна сметка заключаваме, че търсената най-малка стойност е 18.