

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

РУСЕ, 29 – 30 януари 2008 г.

Тема за 11 клас

Кратки решения на задачите

Задача 11.1. Дадени са различни цели числа a , b и c , които образуват аритметична прогресия. Същите числа, евентуално в някакъв друг ред, образуват геометрична прогресия. Да се докаже, че $a^2 + b^2 + c^2$ се дели на 21.

Решение. От условието имаме $a + c = 2b$. Тъй като числата образуват геометрична прогресия, ако едно от тях е равно на нула, то и другите две числа са нули, което е противоречие с условието. В зависимост от подредбата на числата в геометричната прогресия, имаме $b^2 = ac$, $a^2 = bc$ или $c^2 = ab$, като последните два случая са аналогични. Ако $b^2 = ac$, то $(a + c)^2 = 4b^2 = 4ac$, откъдето $(a - c)^2 = 0$, т.е. $a = c$. Оттук $a = b = c$, което е противоречие с условието.

Когато $a^2 = bc$ получаваме $a + \frac{a^2}{b} = 2b$, откъдето $a^2 + ab - 2b^2 = 0$. Решенията на това хомогенно уравнение са $a = b$ (което е противоречие с условието) и $a = -2b$. Следователно $c = 2b - a = 4b$ и тогава сборът $a^2 + b^2 + c^2 = 21b^2$ се дели на 21.

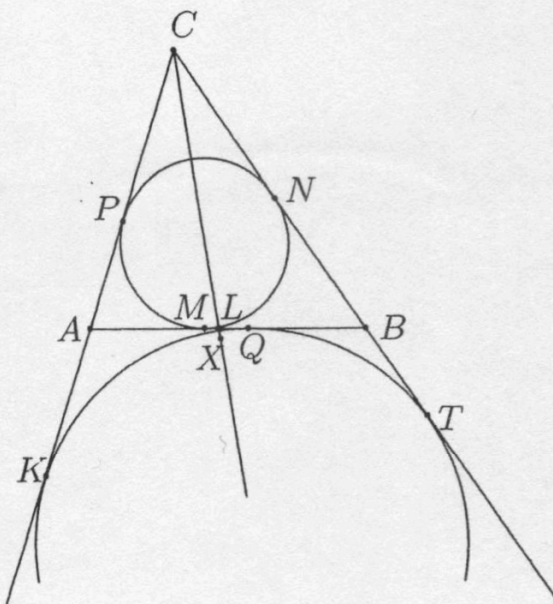
Задача 11.2. Даден е $\triangle ABC$ с ъглополовяща CL ($CA \neq CB$, $L \in AB$). Вписаната в триъгълника окръжност се допира до страните AB , BC и CA съответно в точки M , N и P , а външновписаната откъм AB окръжност се допира до AB и продълженията на CA и CB съответно в точки Q , K и T . Нека k_1 , k_2 и k_3 са описаните окръжности съответно около $\triangle PKL$, $\triangle NTL$ и $\triangle CMQ$.

а) Да се докаже, че втората пресечна точка на k_1 и k_2 лежи на правата CL .

б) Да се докаже, че k_1 , k_2 и k_3 се пресичат в една точка.

Решение. а) При осева симетрия с ос правата CL точките P и N са симетрични, както и точките K и T . Следователно k_1 и k_2 също са симетрични, откъдето следва твърдението.

б) Нека X е втората пресечна точка на k_3 и правата CL . Съгласно а) е достатъчно да докажем, че k_1 минава през X , което е еквивалентно на $CL.CX = CP.CK$. При стандартните означения за триъгълник, като използваме равенството $CL.LX = ML.LQ$ и формулата за ъглополовящата $CL^2 = ab - AL.BL$, получаваме последователно



$$\begin{aligned}
 CL.CX = CP.CK &\iff CL(CL + LX) = (p - c)p \\
 &\iff CL^2 + ML.LQ = (p - c)p \\
 &\iff CL^2 + [LA - (p - a)][LB - (p - a)] = (p - c)p \\
 &\iff CL^2 + LA.LB - c(p - a) + (p - a)^2 = (p - c)p \\
 &\iff ab - cp + ac + p^2 - 2ap + a^2 = p^2 - pc \\
 &\iff a(a + b + c) = 2ap,
 \end{aligned}$$

което е очевидно вярно.

Задача 11.3. Дадени са $2n$ външно неразличими монети. Известно е, че n от тях имат едно и също тегло a , а останалите n монети също са с едно и също тегло b , като $a < b$. Разполагаме с кантар, с който можем да претеглим общото тегло на кои да са n от монетите. Да се докаже, че с $n + 1$ претегляния с този кантар можем да намерим a и b .

Решение. Нека $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ са дадените монети и на i -тото, $i = 1, 2, \dots, n + 1$ претегляне да поставим на кантара монетите $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_{n+i-1}$. Да означим общото тегло на монетите $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ с A . При всяко претегляне кантара ще показва две възможни тегла: $A + a$ или $A + b$ в зависимост от теглото на монетата a_{n+i-1} . Тъй като измежду монетите $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$ има и от двата вида, то $p > 0$ от претеглянията са дали един и същи резултат x , а останалите $q = n + 1 - p > 0$ претегляния са дали резултат y и без ограничение $x < y$. Това означава, че измежду монетите $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$ има точно p монети с тегло a и q монети с тегло b . Следователно измежду монетите $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ има $n - p$ с тегло a и $n - q$ с тегло b . Следователно $(n - p)a + (n - q)b + a = x$ и $(n - p)a + (n - q)b + b = y$. Използвайки, че

$$n = p + q - 1 \text{ получаваме системата: } \begin{cases} qa + (p-1)b = x \\ (q-1)a + pb = y, \end{cases} \text{ откъдето}$$

$$a = \frac{(x-y)p+y}{n} \text{ и } b = \frac{(y-x)q+x}{n}.$$

Задача 11.4. Нека $n_0, n_1, \dots, n_{2008}$ са дадени естествени числа, а M е множеството от всички полиноми $f(x) = a_0x^{2008} + a_1x^{2007} + \dots + a_{2007}x + a_{2008}$, такива че за всяко i , $0 \leq i \leq 2008$, имаме $a_i \in \{1, 2, \dots, n_i\}$. Да се определи кои полиноми от M са повече: тези, на които всички корени са цели числа или тези, които нямат нито един реален корен.

Решение. Нека $f(x) \in M$ и всички негови корени са цели числа. Понеже полиномите от M нямат неотрицателни корени, то $f(x) = a_0(x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_{2008})$, като α_i са естествени числа, които без ограничение можем да считаме наредени по големина: $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{2008}$. Разглеждаме полинома

$$\begin{aligned} f^*(x) = & a_0[x^{2008} + \alpha_1x^{2007} + (\alpha_1\alpha_{1005} + 1)x^{2006} + \alpha_1\alpha_2x^{2005} + \\ & + (\alpha_1\alpha_2\alpha_{1005}\alpha_{1006} + 1)x^{2004} + \dots + \\ & + (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{1003}\alpha_{1005} \dots \alpha_{2007} + 1)x^2 + \\ & + \alpha_1\alpha_2\alpha_{1004}x + \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{1004}\alpha_{1005} \dots \alpha_{2008}]. \end{aligned}$$

Можем да представим $f^*(x)$ като сума от тричлени от вида

$$x^{2k} + \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_t x^{2k-1} + (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_t \alpha_{1005} \dots \alpha_{1004+t})x^{2k-2}.$$

След изнасяне на x^{2k-2} пред скоби, получаваме квадратен тричлен с дискриминанта $D = \alpha_1 \dots \alpha_t [\alpha_1 \dots \alpha_t - 4\alpha_{1005} \dots \alpha_{t+1004}]$, като от наредбата на корените следва, че $D < 0$. Това означава, че $f^*(x)$ няма реални корени, понеже $f^*(x) > 0$ за всяко x . Освено това от формулите на Виет лесно се вижда, че ако $f(x) \in M$, то $f^*(x) \in M$. Също така ако $f(x) \neq g(x)$, $f, g \in M$, то $f^*(x) \neq g^*(x)$, защото иначе според принципа за сравняване на коефициентите, ще получим, че $f(x)$ и $g(x)$ имат едни и същи корени и старши коефициенти, т.е. $f(x) \equiv g(x)$.

При това съпоставяне очевидно полинома $x^{2008} + x^{2007} + \dots + x + 1$ не е съпоставен на никой, а той е от M и няма реални корени. Следователно полиномите от M , които нямат нито един реален корен са повече от полиномите от M , на които всички корени са цели числа.