

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

РУСЕ, 1- 3 февруари 2008 г.

Тема за 10 клас

Кратки решения на задачите

Задача 10.1. Даден е квадратният тричлен $f(x) = x^2 + ax + 2$, където a е реален параметър. Известно е, че уравнението $f(x) - x = 0$ има два реални корена x_1 и x_2 , а уравнението $f(x - a) - x = 0$ – два реални корена x_3 и x_4 , като е изпълнено равенството $x_3 - x_1 = 3(x_4 - x_2)$.

а) Да се докаже, че $x_4 = x_2 + \frac{a}{2}$.

б) Да се намерят всички възможни стойности на a .

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned}f(x) - x &= x^2 + (a - 1)x + 2 \\f(x - a) - x &= x^2 - (a + 1)x + 2.\end{aligned}$$

Сега от условието получаваме $x_3 - x_1 + x_4 - x_2 = 4(x_4 - x_2)$, откъдето $4(x_4 - x_2) = (a + 1) + (a - 1) = 2a$. Следователно $x_4 = x_2 + \frac{a}{2}$.

б) От условието и а) получаваме системата

$$\begin{cases}x_2^2 + (a - 1)x_2 + 2 = 0 \\(x_2^2 + \frac{a}{2})^2 - (a + 1)(x_2 + \frac{a}{2}) + 2 = 0.\end{cases}$$

Изваждайки първото от второто уравнение и решавайки по отношение на x_2 получаваме $x_2 = -\frac{a}{4} - \frac{1}{2}$. Заместваме получената стойност за x_2 в уравнението $f(x) - x = 0$:

$$\left(-\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}\right)^2 + (a - 1)\left(-\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}\right) + 2 = 0.$$

откъдето $a^2 = \frac{44}{3}$ и $a = \pm\sqrt{\frac{44}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{33}}{3}$.

Задача 10.2. Върху страните AC и BC на $\triangle ABC$ с $AC < BC$ са взети съответно точки M и N като $AM = BN$. Нека P е пресечната точка на правите AN и BM , а Q е точка върху отсечката BC , за която $BQ = AC$. Да се докаже, че правата PQ е успоредна на ъглополовящата на $\triangle ABC$ през върха C .

Решение. Означаваме $y = BN = AM$, $BC = a$ и $AC = b$. Тогава $CM = NQ = b - y$ и $NC = a - y$. Ако $PQ \parallel AC$, то $\frac{PQ}{MC} = \frac{BQ}{BC}$, т.е. $a = \frac{b(b - y)}{PQ}$ и

аналогично $\frac{PQ}{AC} = \frac{NQ}{NC}$, т.е. $a - y = \frac{b(b-y)}{PQ}$. Следователно $a = a - y$, което е невъзможно.

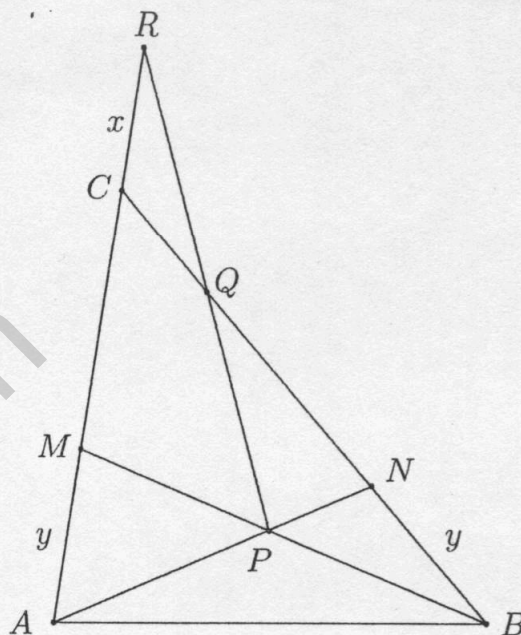
Нека правата PQ пресича правата AC в точка R и $x = CR$. От теоремата на Менелай за $\triangle ANC$ и правите PR и BM имаме съответно

$$\frac{AP}{PN} \cdot \frac{NQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1, \quad \frac{AP}{PN} \cdot \frac{NB}{BC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Приравнявайки левите страни на горните равенства и използвайки, че $CM = NQ$ и $AM = BN$, получаваме

$$\frac{1}{a-b} \cdot \frac{x}{x+b} = \frac{1}{a}.$$

Оттук $x = a - b$, т.е. $CQ = CR$. Следователно $\angle CRQ = \gamma/2$ и правата PQ е успоредна на ъглополовящата през върха C .



Задача 10.3. Нека k и n са естествени числа. Означаваме с $\lambda(k, n)$ броя на представянията на k във вида

$$k = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 2^{n-1},$$

където $a_i \in \{-1, 0, +1\}$.

а) Да се намери $\lambda(2^i, n)$, където $0 \leq i \leq n-1$.

б) Да се намери $\lambda(2^i - 1, n)$, където $0 \leq i \leq n$.

Решение. а) От равенството $2^i = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 2^{n-1}$ следва, че $a_0 = a_1 = \dots = a_{i-1} = 0$. Нека j е най-големият индекс, за който $a_j \neq 0$. Тогава $a_j = 1$ и имаме единствено представяне

$$2^i = -2^i - 2^{i+1} - \dots - 2^{j-1} + 2^j.$$

Тъй като $j \in \{i, i+1, \dots, n-1\}$, заключаваме, че $\lambda(2^i, n) = n - i$.

б) Лесно се съобразява, че за нечетни m е в сила рекурентната връзка

$$\lambda(m, n) = \lambda\left(\frac{m-1}{2}, n-1\right) + \lambda\left(\frac{m+1}{2}, n-1\right).$$

Оттук получаваме

$$\begin{aligned}\lambda(2^i - 1, n) &= \lambda(2^{i-1} - 1, n-1) + \lambda(2^{i-1}, n-1) \\ \lambda(2^{i-1} - 1, n-1) &= \lambda(2^{i-2} - 1, n-2) + \lambda(2^{i-2}, n-2) \\ \lambda(2^{i-2} - 1, n-2) &= \lambda(2^{i-2} - 1, n-3) + \lambda(2^{i-3}, n-3) \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda(2^2 - 1, n - (i-2)) &= \lambda(2 - 1, n - (i-1)) + \lambda(2, n - (i-1)) \\ \lambda(1, n - (i-1)) &= n - i + 1.\end{aligned}$$

Сумирайки горните равенства и отчитайки резултата от точка а), получаваме $\lambda(2^i - 1, n) = i(n - i) + 1$.

Забележка. Ако $2^i - 1 = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 2^{n-1}$, то числото a_0 е нечетно и от равенството $\frac{2^i - 1 - a_0}{2} = a_1 + a_2 \cdot 2^1 + \dots + a_{n-1} \cdot 2^{n-2}$ следва, че $\lambda(2^i - 1, n) = \lambda(2^{i-1} - 1, n-1) + \lambda(2^{i-1}, n-1) = \lambda(2^{i-1} - 1, n-1) + n - i$. Продължавайки по същия начин (или прилагайки индукция), достигахме до $\lambda(2^i - 1, n) = i(n - i) + 1$.

Задача 10.4. Да се докаже, че уравнението $x^7 + 92 = y^2$ няма решение в цели числа.

Решение. Да допуснем, че уравнението има решение в цели числа. Очевидно x и y са с еднаква четност. Ако са четни, $x = 2x_1$ и $y = 2y_1$, където x_1 и y_1 са цели числа, то $32x_1^7 + 23 = y_1^2$, което е невъзможно по модул 4. Следователно x и y са нечетни. Да отбележим, че можем да считаме, че x и y са естествени числа (от $x^7 = y^2 - 92 \geq -92$ следва, че $x \geq -1$ и случаите $x = -1$ и $x = 0$ се проверяват директно).

Да представим уравнението във вида

$$x^7 + 128 = y^2 + 36 \iff (x+2)M = y^2 + 6^2,$$

където $M = x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64$. Очевидно M е естествено число. Освен това $M \equiv x^6 - 2x^5 \equiv 3 \pmod{4}$ и следователно M има прост делител $p \equiv 3 \pmod{4}$. Тогава p дели $y^2 + 6^2$, което означава, че p дели y и p дели 6, т.е. $p = 3$.

От друга страна, не е трудно да се провери, че $M \equiv 1 \pmod{3}$. Полученото противоречие показва, че даденото уравнение няма решение в цели числа.