ОТГОВОРИ

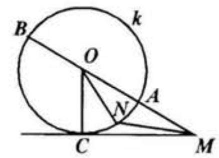
1. в). **2.** в). **3.** б). **4.** а). **5.** г) $x = 1$. **6.** б). **7.** б). **8.** а). **9.** б). **10.** в). **11.** б). **12.** б). **13.** $0,96$. **14.** $8\ \mathrm{cm}^2$ **15.** $x - y = 2$. **16.** $\cos\sphericalangle LCB = \frac{46}{8\sqrt{37}}$. **17.** $R = \frac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$.

РЕШЕНИЯ

13. Като вземем предвид, че от $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = 1.4$ следва

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 1,96 \iff 1 + \sin\alpha = 1,96$$

заключаваме, че $\sin\alpha = 1,96 - 1 = 0,96$.



14. В правоъгълния $\triangle MOC$ имаме $OC = \frac{1}{2}MO$, следователно $\sphericalangle CMO = 30^\circ$, а $\sphericalangle MOC = 60^\circ$. По условие $\widehat{CN} = \widehat{NA}$. Тогава $\sphericalangle NOA = \frac{1}{2}\sphericalangle COA = 30^\circ$. Лицето на $\triangle MON$ е $S_{MON} = \frac{1}{2}ON.MO.\sin\sphericalangle MON = \frac{1}{2}.4.8.\frac{1}{2} = 8\ \mathrm{cm}^2$

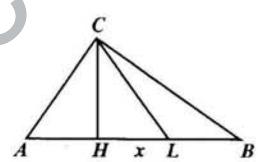
15. Преобразуваме дадената система и получаваме

$$\left|\begin{array}{l} xy(x-y) = 1 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2) = 11 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} xy(x-y) = 1 \\ (x-y)\Big((x-y)^2 + 3xy\Big) = 11. \end{array}\right.$$

Заместаме $xy = \frac{1}{x-y}$ във второто уравнение на системата и получаваме

$$(x-y)\left((x-y)^2 + \frac{3}{x-y}\right) = 11 \iff (x-y)^3 = 8,$$

откъдето $x - y = 2$.



16. Означаваме $HL = x$. Имаме

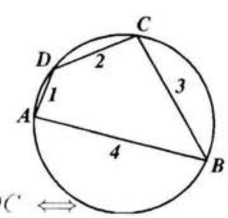
$$CH^2 = AH.HB \iff CL^2 - HL^2 = AH.HB \iff$$
$$16 - x^2 = \frac{9}{2\sqrt{7}}.2x \iff x^2 + \frac{9}{\sqrt{7}}x - 16 = 0,$$

откъдето

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{-9}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{81}{7} + 64}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{-9+23}{\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}.$$

Оттук $LH = x = \sqrt{7}$, $BC = \sqrt{CH^2 + HB^2} = \sqrt{16 - x^2 + 4x^2} = \sqrt{16 + 3.7} = \sqrt{37}$.
Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle LCB$ и получаваме

$$\cos\sphericalangle LCB = \frac{BC^2 + CL^2 - LB^2}{2.BC.CL} = \frac{37 + 16 - 7}{2.\sqrt{37}.4} = \frac{46}{8\sqrt{37}}.$$



17. Тъй като $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ$, то като приложим косинусовата теорема за $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$, получаваме

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\sphericalangle ABC$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2.AD.DC.\cos\sphericalangle ADC.$$

Приравняваме двете равенства и последователно получаваме

$$4^2 + 3^2 - 2.3.4.\cos(180^\circ - \sphericalangle ADC) = 1^2 + 2^2 - 2.1.2.\cos\sphericalangle ADC \iff$$

$$16 + 9 + 24\cos\sphericalangle ADC = 1 + 4 - 4\cos\sphericalangle ADC \iff 28\cos\sphericalangle ADC = 5 - 25 \iff \cos\sphericalangle ADC = \frac{-5}{7}$$

откъдето

$$\sin\sphericalangle ADC = \sqrt{1 - \frac{5^2}{7^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \text{ и } AC^2 = 5 - 4.\left(\frac{-5}{7}\right) = 5 + \frac{20}{7} = \frac{55}{7}$$

Прилагаме синусовата теорема за $\triangle ADC$ и получаваме $\frac{AC}{\sin\sphericalangle ADC} = 2R$, където R е радиусът на описаната около $\triangle ACD$ окръжност. Заместваме AC и $\sin\sphericalangle ADC$ с намерените стойности и получаваме $\frac{\sqrt{\frac{55}{7}}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}} = 2R$, откъдето $R = \frac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$.