

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

Плевен, 29 – 30 януари 2010 г.

Тема за 11 клас

Задача 1. Да се намерят всички реални стойности на реалния параметър a , за които уравнението

$$25^x - (a+1)5^x - 6a^2 + 3a = 0$$

има единствено решение.

Задача 2. В четириъгълник $ABCD$ е вписана окръжност с център O , която се допира до страните AD и BC съответно в точки P и Q . Правите AO , BO , CO и DO пресичат правата PQ съответно в точките A_1 , B_1 , C_1 и D_1 .

а) Да се докаже, че $BA_1 \perp AO$.

б) Ако $\frac{AB + CD}{A_1B_1 + C_1D_1} = 2$, да се намери ъгълът между правите AD и BC .

Задача 3. Нека n е дадено естествено число. Да се намерят всички реални числа a , за които редицата $x_0 = a, x_1 = 1$ и

$$x_{i+2} = \frac{x_{i+1} - (n-i)x_i}{i+1} \quad \text{при } i \geq 0$$

е изпълнено $x_{2010n} = 0$.

Задача 4. В една държава има 1000 града, някои от които трябва да се свържат с двупосочни пътища, така че от всеки град да излизат точно три пътя и от всеки град да може да се стигне до всеки друг град. Път между два града A и B се нарича *главен*, ако след затварянето му от A не може да се стигне до B . Да се докаже, че за всяко цяло число t , $0 \leq t \leq 331$ пътищата могат да се прекарат така, че да има точно t главни пътя.

Време за работа 4.5 часа.