Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически цъстезания
Бургас, 6 - 8 февруари 2009 г.

Тема за 12 клас

Задача 12.1. Редицата $x_1, x_2, \dots$ е дефинирана с равенствата $x_1 = 2$ и $x_{n+1} = \dfrac{1+2x_n}{2+x_n}$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:

а) редицата с общ член $\dfrac{1}{1+x_n} - \dfrac{1}{2}$ е геометрична прогресия и да се намери нейното частно;

б) редицата с общ член $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+x_1} + \cdots + \dfrac{1}{1+x_n}\right)$ е сходяща и да се намери нейната граница.

Задача 12.2. Нека $ABCD$ е вписан в окръжност четириъгълник. Точка E върху лъча $DA^{\rightarrow}$ е такава, че $\angle ABC = 2\angle EBD$. Да се докаже, че

$$DE = \frac{AC.BD}{AB+BC}.$$

Задача 12.3. Да се намерят всички полиноми P с реални коефициенти такива, че $P(x-1)P(x+1) > P^2(x) - 1$ за произволно реално число x.

Задача 12.4. Да се намерят всички естествени числа a, b, c, за които уравнението $(x+y)^a(x^2+y^2)^b = 8(xy)^c$ има безбройно много решения в естествени числа.

Време за работа 4.5 часа.