

Зимни математически цъстезания  
Бургас, 6 - 8 февруари 2009 г.

Тема за 11 клас

**Задача 11.1.** Дадени са аритметична прогресия с първи член  $a_1$  и разлика  $d \neq 0$  и геометрична прогресия с първи член  $b_1$  и частно  $q$ . Ако  $a_1 + b_1 = d + 2a_1 = 0$  и сборът на първите 4 члена на геометричната прогресия е равен на сборът на първите 5 члена на аритметичната прогресия, да се намери частното на геометричната прогресия.

**Задача 11.2.** Да се реши системата:

$$\begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos(\pi yz) + 1 = 0 \\ x^2 y^2 z + z + 10 = 0 \end{cases}.$$

**Задача 11.3.** Даден е остроъгълен триъгълник  $ABC$  с център на описаната окръжност точка  $O$ . Върху отсечките  $BO$  и  $CO$  са избрани съответно точки  $M$  и  $N$  така, че  $OM = CN$ . Точки  $P$  и  $Q$  са такива, че  $\triangle AMP$  и  $\triangle ANQ$  са подобни и еднакво ориентирани съответно на  $\triangle AOC$  и  $\triangle AOB$ . Да се докаже, че сборът  $PN + QM$  не зависи от избора на точките  $M$  и  $N$ .

**Задача 11.4.** Нека  $A$  е множество с  $n \geq 5$  елемента. Да се намери минималното естествено число  $m$  със следното свойство: За всеки 10 триелементни подмножества на  $A$  съществува оцветяване на елементите на  $A$  в  $m$  цвята така, че никое от избраните триелементни подмножества на  $A$  не съдържа три едноцветни елемента.

*Време за работа 4.5 часа.*