

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически цъстезания
Русе, 1 - 3 февруари 2008 г.

Тема за 12 клас

Задача 1. (6 точки) Да се намерят стойностите на реалния параметър α , за които неравенството

$$\log_{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(x^2 - x + 1) < 1$$

е изпълнено за всяко x .

Задача 2. (6 точки) Ъглополовящата на $\angle BAC$ в $\triangle ABC$ пресича страната BC в точка E , а външната ъглополовяща на $\angle ACB$ пресича лъча BA в точка F . Ако дължината на отсечката AF е равна на периметъра на $\triangle ACE$, да се намери отношението $\angle BAC : \angle ABC$.

Задача 3. (7 точки) Нека $f_k(x) = \frac{1}{k}(\sin^k x + \cos^k x)$. Да се намерят всички естествени числа m и n , $m \neq n$ за които функцията $f_m(x) - f_n(x)$ е константа.

Задача 4. (7 точки) Нека R^+ е множеството на реалните положителни числа.

а) Да се построи пример за функция $f : R^+ \rightarrow R^+$, която има следното свойство:

$$2f(x^2) \geq xf(x) + x \quad \text{за всяко } x > 0.$$

б) Да се докаже, че ако $f(x)$ има свойството от а), то $f(x^3) \geq x^2$, при $x > 0$.

Време за работа 4.5 часа.