Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически цъстезания
Русе, 1 - 3 февруари 2008 г.

Тема за 11 клас

Задача 1. *(6 точки)* Дадени са различните цели числа a, b и c, който образуват аритметична прогресия. Същите числа, евентуално в някакъв друг ред, образуват геометрична прогресия. Да се докаже, че $a^2 + b^2 + c^2$ се дели на 21.

Задача 2. *(6 точки)* Даден е ΔABC с ъглополовяща $\boldsymbol{CL}$ ($CA \neq CB, L \in AB$). Вписаната в триъгълника окръжност се допира до страните AB, BC и CA съответно в точки M, N и P, а външновписаната откъм AB окръжност се допира до AB и продълженията на CA и CB съответно в точки Q, K и T. Нека k_1, k_2 и k_3 са описаните окръжности около $\Delta PKL, \Delta NTL$ и ΔCMQ.

а) Да се докаже, че втората пресечна точка на k_1 и k_2 лежи на правата CL.

б) Да се докаже, че k_1, k_2 и k_3 се пресичат в една точка.

Задача 3. *(7 точки)* Дадени са $\boldsymbol{2n}$, $n \in N$, външно неразличими монети. Известно е, че $\boldsymbol{n}$ от тях имат едно и също тегло $\boldsymbol{a}$, а останалите $\boldsymbol{n}$ монети също са с едно и също тегло $\boldsymbol{b}$, като $\boldsymbol{a<b}$. Разполагаме с кантар, с който можем за претеглим общото тегло на кои да са $\boldsymbol{n}$ от монетите. Да се докаже, че с $\boldsymbol{n+1}$ претегляния с този кантар можем да намерим $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Задача 4. *(7 точки)* Нека $n_0, n_1, ..., n_{2008}$ са дадени естествени числа, а $\boldsymbol{M}$ е множеството от всички полиноми $f(x) = a_0 x^{2008} + a_1 x^{2007} + ... + a_{2007} x + a_{2008}$, такива че за всяко $\boldsymbol{i}$, $0 \leq i \leq 2008$, имаме $a_i \in 1,2,...,n$. Да се определи кои полиноми от $\boldsymbol{M}$ са повече: тези, на които всички корени са цели числа или тези, който нямат нито един реален корен.

Време за работа 4.5 часа.