

Тема за 10 клас

Задача 10.1. Даден е квадратният тричлен $f(x) = x^2 + ax + 2$, където a е реален параметър. Известно е, че уравнението $f(x) - x = 0$ има два реални корена x_1 и x_2 , а уравнението $f(x - a) - x = 0$ - два реални корена x_3 и x_4 , като е изпълнено равенството $x_3 - x_1 = 3(x_4 - x_2)$.

- а) Да се докаже, че $x_4 = x_2 + \frac{a}{2}$.
б) Да се намерят всички възможни стойности на a .

Задача 10.2. Върху страните AC и BC на $\triangle ABC$ с $AC < BC$ са взети съответно точки M и N като $AM = BN$. Нека P е пресечната точка на правите AN и BM , а Q е точка върху отсечката BC , за която $BQ = AC$. Да се докаже, че правата PQ е успоредна на ъглополовящата на $\triangle ABC$ през върха C .

Задача 10.3. Нека k и n са естествени числа. Означаваме с $\lambda(k, n)$ броя на представянията на k във вида

$$k = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 2^{n-1},$$

където $a_i \in \{-1, 0, +1\}$.

- а) Да се намери $\lambda(2^i, n)$, където $0 \leq i \leq n - 1$.
б) Да се намери $\lambda(2^i - 1, n)$, където $0 \leq i \leq n$.

Задача 10.4. Да се докаже, че уравнението $x^7 + 92 = y^2$ няма решение в цели числа.