

Министерство на образованието и науката  
Съюз на математиците в България

---

Зимни математически състезания  
Варна, 9 – 11 февруари 2007 г.

Тема за 12 клас

**Задача 1.** Даден е куб с ръб 1. Прекарана е равнина, която минава през връх на основата на куба и центровете на двете околни стени, които не го съдържат. Да се намери отношението, в което сечението на равнината с куба дели неговия обем.

**Задача 2.** Нека  $ABC$  е правоъгълен триъгълник с катети  $AC = 1$  и  $BC = 2$ . През точка  $A_1$  от катета  $BC$ , за която  $A_1C \neq \frac{1}{3}$ , е прекарана права, успоредна на  $AB$ , която пресича  $AC$  в точка  $B_1$ . Нека  $C_1$  е петата на перпендикуляра от  $B_1$  към  $AB$ . През  $C_1$  е прекарана права, успоредна на  $AC$ , която пресича  $BC$  в точка  $A_2$ . Правата през  $A_2$ , успоредна на  $AB$ , пресича  $AC$  в точка  $B_2$  и т. н. Да се пресметне:

а)  $\frac{3A_2C - 1}{3A_1C - 1}$ ;      б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{A_n B_n C_n}$ .

**Задача 3.** Александър и Деница играят следната игра. Александър разрязва (ако е възможно) лента с целочислена дължина на три ленти с целочислени дължини, от които само една е най-дълга. С тази най-дълга лента Деница извършва подобна операция и т.н. Играта печели този, който последен може да разреже получената от другия лента. За кои ленти с дължини точни степени (т.е.  $a^b$ ,  $a - 1$ ,  $b - 1 \in \mathbb{N}$ ) Деница има печеливша стратегия?

**Задача 4.** Да се намерят всички естествени числа  $n$  такива, че ако  $a, b, c \geq 0$  и  $a + b + c = 3$ , то  $abc(a^n + b^n + c^n) \leq 3$ .

Време за работа: 4.5 часа