Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически състезания
Варна, 9 – 11 февруари 2007 г.

Тема за 11 клас

Задача 1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x - a^2 + a = 0$$

има три различни реални корена, които образуват аритметична прогресия.

Задача 2. В $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, са прекарани ъглополовящите AA_1 и BB_1 ($A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$). Правата A_1B_1 пресича описаната около триъгълника окръжност в точки A_2 и B_2.

а) Да се докаже, че правата OI е успоредна на A_1B_1, където O и I са съответно центърът на описаната и на вписаната окръжност за триъгълника ABC.

б) Ако R е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$, несъдържаща C, а P и Q са съответно средите на A_1B_1 и A_2B_2, да се докаже, че $RP = RQ$.

Задача 3. Имаме хартиена лента с дължина 2007. Разрязваме лентата на две части и записваме дължините на двете парчета. След това разрязваме едно от двете парчета на две части и отново записваме дължините на новополучените парчета. Продължаваме по този начин докато всички парчета са с дължина 1. Едно разрязване наричаме "лошо", ако двете получени части не са с равни дължини.

а) Да се намери минималния възможен брой "лоши" разрязвания.

б) Да се докаже, че за всички случаи с минимален брой лоши разрязвания броят на различните записани числа е един и същ.

Задача 4. За всяко естествено число n полагаме $a_n = 0$, ако броят на делителите на n, които са по-големи от 2007, е четно число, и $a_n = 1$, ако този брой е нечетно число. Да се определи дали числото $\alpha = 0,a_1a_2a_3\ldots a_k\ldots$ е рационално.

Време за работа: 4.5 часа