

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически състезания
Варна, 9 – 11 февруари 2007 г.

Тема за 10 клас

Задача 1. Дадени са функциите $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ и $g(x) = x^2 - x + 2$.
Да се определи за кои стойности на x :

а) $\frac{f(x)}{g(x)}$ е естествено число;

б) е изпълнено неравенството $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{2}$.

Задача 2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, в който са спуснати височините BB_1 и CC_1 към страните AC и AB ($B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$). Нека M и N са съответно средите на BB_1 и CC_1 , $P = AM \cap CC_1$ и $Q = AN \cap BB_1$.
Да се докаже, че

а) точките M , N , P и Q лежат на една окръжност;

б) ако точките B , C , P и Q лежат на една окръжност, то $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа x, y , за които $xy^2 + 2y$ дели $2x^2y + xy^2 + 8x$.

Задача 4. Група от k човека, всеки двама от които се познават, наричаме k -компания.

а) Да се намери минималният брой познанства в група от n човека така, че след запознаване на кои да е двама непознати възниква нова 3-компания.

б) Да се намери минималният брой познанства в група от n човека така, че след запознаване на кои да е двама непознати възниква нова 4-компания.

Време за работа: 4.5 часа