

Зимни Математически Състезания  
Плевен, 3 - 5 февруари 2006 г.

Тема за 12 клас

Задача 12.1. Дадена е функцията  $f(x) = \frac{x^2 - 2006x + 1}{x^2 + 1}$ .

- а) Да се реши неравенството  $f'(x) \geq 0$ .  
б) Да се докаже, че  $|f(x) - f(y)| \leq 2006$  за произволни реални числа  $x$  и  $y$ .

Автор: Олег Мушкаргов

Задача 12.2. Върху диаметър на окръжност с радиус  $\sqrt{5}$  са взети точки  $M$  и  $N$ , равноотдалечени от центъра ѝ. През  $M$  е построена хорда  $AB$ , а през  $N$  е построена хорда  $AC$  така, че

$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{3}{MN^2}.$$

Да се намери разстоянието от центъра на окръжността до точките  $M$  и  $N$ .

Автор: Олег Мушкаргов

Задача 12.3. Да се намери максималният брой телефонни номера, които изпълняват следните три условия:

- а) всички те са петцифрени числа, като могат да започват с 0;  
б) във всеки номер участват най-много две различни;  
в) изтриването на произволна цифра в два произволни номера (възможно в различни позиции) не води до две идентични редици с дължина 4.

Автор: Иван Ланджев

Задача 12.4. Нека  $O$  е центърът на описаната окръжност около равнобедрен триъгълник  $ABC$  с основа  $AB$ . Правата  $AO$  пресича бедрото  $BC$  в точка  $D$ . Известно е, че  $|BD|$  и  $|CD|$  са цели числа, а  $|AO| - |CD|$  е просто число. Да се намерят тези три числа.

Автор: Николай Николов