Министерство на Образованието и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни Математически Състезания
Плевен , 3 - 5 февруари 2006 г.

Тема за 11 клас

Задача 11.1. Да се реши уравнението

$$\log_a(a^{2(x^2+x)}+a^2)=x^2+x+\log_a(a^2+1),$$

където a е реален параметър.

Автор: Емил Колев

Задача 11.2. Даден е $\triangle ABC$, в който $\sphericalangle ACB=60^\circ$. Редицата от точки $A_0, A_1, \ldots, A_{2006}$ е дефинирана така: $A_0=A$, A_1 е петата на перпендикуляра от A_0 към правата BC, A_2 е петата на перпендикуляра от A_1 към правата AC и т.н., A_{2006} е петата на перпендикуляра от A_{2005} към правата AC. По аналогичен начин е дефинирана редицата $B_0, B_1, \ldots, B_{2006}$: $B_0=B$, B_1 е петата на перпендикуляра от B_0 към правата AC и т.н. Да се докаже, че правата $A_{2006}B_{2006}$ се допира до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност тогава и само тогава, когато

$$\frac{AC+BC}{AB}=\frac{2^{2006}+1}{2^{2006}-1}.$$

Автор:Александър Иванов

Задача 11.3. Да се намерят всички реални числа x, y, z, за които

$$a(\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z)+2(1-a)(\cos x+\cos y+\cos z)+6=9a,$$

където a е целочислен параметър.

Автор:Александър Иванов

Задача 11.4. Едно число с 2006 цифри наричаме "лошо", ако всяко число, образувано от три негови последователни цифри, не се дели на 3.

а) Да се намери броят на "лошите" числа, в чиито десетичен запис участват само цифрите 1, 2 и 3.

б) Нека a и b са различни "лоши" числа, в чиито десетичен запис участват само цифрите 1, 2 и 3. Ако $a+b$ е лошо число и k е броят на разредите, в които a и b имат еднакви цифри, да се намерят всички възможни стойности на k.

Автор: Емил Колев