Министерство на Образованието и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни Математически Състезания
Плевен , 3 - 5 февруари 2006 г.

Тема за 10 клас

Задача 10.1. Дадено е неравенството

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\geq\sqrt{a},$$

където a е реален параметър.

а) Да се реши неравенството при $a=3$.

б) Да се намерят стойностите на a, за които неравенството има решения и множеството от решенията му е интервал с дължина, ненадминаваща $\sqrt{3}$.

Автор: Кероне Чакърян

Задача 10.2. На страните AB и BC на успоредника $ABCD$ са построени точки E и F, така че DE разполовява ъгъл ADF и $AE+CF=DF$. Права през C, перпендикулярна на DE, пресича страната AD в точка L и диагонала BD в точка H. Нека DE пресича AC в точка N.

а) Да се докаже, че $AE=DL$;

б) Ако $HN||AD$, да се докаже, че $BC=CD$;

в) Ако $HN||AD$, да се докаже, че $ABCD$ е квадрат.

Автор: Ивайло Кортезов

Задача 10.3. Да се реши в естествени числа t,x,y,z уравнението

$$2^t=3^x5^y+7^z.$$

Автор: Кероне Чакърян

Задача 10.4. В двора на крал Артур има 40 рицари, които всяка сутрин се дуелират по двойки (всеки има по един противник на сутрин), а всяка вечер сядат около кръгла маса (без да се местят по време на вечерята).

а) Колко най-малко сутрини са необходими на крал Артур, за да организира дуелите така, че всеки двама рицари да са се дуелирали поне веднъж?

б) Колко най-малко вечери са необходими, за да може всеки двама рицари да са били съседи на масата поне два пъти?

Автор: Ивайло Кортезов