Министерство на Образованието и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни Математически Състезания
Бургас, 29 януари 2005 г.

Тема за 9 клас

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравненията $x^2 - (2a+1)x + a = 0$ и $x^2 + (a-4)x + a - 1 = 0$ имат реални корени съответно x_1, x_2 и x_3, x_4, за които е изпълнено равенството

$$\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_4}{x_2} = \frac{x_1 x_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{a}.$$

Петър Бойваленков

Задача 9.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Окръжност k през A и B пресича страните AC и BC съответно във вътрешни точки M и N. Допирателните към k в M и N се пресичат в точка O. Да се докаже, че O е център на описаната около $\triangle CMN$ окръжност тогава и само тогава, когато AB е диаметър на k.

Петър Бойваленков

Задача 9.3. Да се намерят всички четирицифрени естествени числа m, по-малки от 2005, за които съществува естествено число $n < m$, такова, че $m - n$ има не повече от три естествени делителя и mn е точен квадрат.

Петър Бойваленков, Ивайло Кортезов

Задача 9.4. Иво номерирал 100 картички с целите числа от 1 до 100 и дал на Яна част от тях. Известно е, че за всяка картичка на Иво и всяка картичка на Яна, сборът от числата на тях не е в Иво и произведението им не е в Яна. Колко картички има Яна, ако числото 13 не е в нея?

Ивайло Кортезов