

Министерство на Образованието и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни Математически Състезания
Бургас, 29 януари 2005 г.

Тема за 12 клас

Задача 12.1. Редиците $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ от реални числа изпълняват равенствата $a_{n+1} = 2b_n - a_n$ и $b_{n+1} = 2a_n - b_n$ за всяко n . Да се докаже, че:

- а) $a_{n+1} = 2(a_1 + b_1) - 3a_n$;
- б) ако $a_n > 0$ за всяко n , то $a_1 = b_1$.

Николай Николов

Задача 12.2. Окръжност през върха A на $\triangle ABC$, $AB \neq AC$, пресича страните AB и AC съответно в точки M и N , а страната BC в точки P и Q така, че Q е между B и P . Да се намери $\sphericalangle BAC$, ако $MP \parallel AC$, $NQ \parallel AB$ и $\frac{BP}{CQ} = \frac{AB}{AC}$.

Олег Мушкаров, Николай Николов

Задача 12.3. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които множеството от стойностите на функцията

$$f(x) = \frac{\sin^2 x - a}{\sin^3 x - (a^2 + 2)\sin x + 2}$$

съдържа интервала $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Николай Николов

Задача 12.4. Да се намерят всички целочислени триъгълници ABC , за които страната AC е равна на ъглополовящата през върха A и чийто периметър е число от вида $10p$, където p е просто число.

Олег Мушкаров