Министерство на Образованието и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни Математически Състезания
Бургас, 29 януари 2005 г.

Тема за 10 клас

Задача 10.1. Дадено е неравенството $|x^2-5x+6| \leq x+a$, където a е реален параметър.

а) Да се реши неравенството при $a=0$.

б) Да се определи за кои стойности на a неравенството има точно три цели решения.

Стоян Атанасов

Задача 10.2. В $\triangle ABC$, $AC \neq BC$, с I е означен центърът на вписаната окръжност k, а с D, E, F – допирните точки на k съответно със страните AB, BC и AC.

а) Ако $S = CI \cap EF$, да се докаже, че $\triangle CDI \sim \triangle DSI$.

б) Нека M е втората пресечна точка на k и CD. Допирателната към k в M пресича правата AB в точка G. Да се докаже, че $GS \perp CI$.

Стоян Атанасов, Иван Ланджев

Задача 10.3. Да се реши в цели числа уравнението

$$z^2+1 = xy(xy+2y-2x-4).$$

Иван Ланджев

Задача 10.4. Във всяка от клетките на квадратна таблица с n реда и n стълба, $n \geq 2$, е записано едно от числата $+1$ и -1. Клетката, намираща се в i-тия ред и j-тия стълб означаваме с (i,j), $i,j = 0,1,\ldots,n-1$. Съседни на клетката (i,j) са клетките $(i,j-1)$, $(i,j+1)$, $(i-1,j)$ и $(i+1,j)$, където събирането и изваждането са по модул n. На всяка стъпка заменяме числото, записано във всяка клетка, с произведението на числата в четирите съседни клетки. Например,

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline +1 & -1 & +1 \\ \hline +1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & +1 & -1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline +1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & +1 & +1 \\ \hline -1 & +1 & +1 \\ \hline \end{array}.$$

Да се намерят всички стойности на n, за които от произволна таблица след краен брой стъпки се достига до таблица, съставена само от $+1$.

Иван Ланджев