

Министерство на образованието и науката  
Съюз на математиците в България

---

Зимни математически състезания  
Русе, 31 януари 2004 г.

Тема за 12 клас

Задача 12.1. Нека  $a_1 > 0$  и  $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$  при  $n \geq 1$ . Да се докаже, че:

- а)  $a_n \geq n$  при  $n \geq 2$ ;
- б) редицата с общ член  $\frac{a_n}{n}$  е сходяща и да се намери нейната граница.

*Олег Мушкаргов, Николай Николов*

Задача 12.2. За  $\triangle ABC$  с ортоцентър  $H$  са в сила равенствата  $AH^2 + BH^2 + CH^2 = 7$  и  $AH \cdot BH \cdot CH = 3$ . Да се намерят:

- а) радиуса на описаната окръжност около  $\triangle ABC$ ;
- б) страните на  $\triangle ABC$  с максимално лице.

*Олег Мушкаргов, Николай Николов*

Задача 12.3. Да се докаже, че за всяко естествено число  $a \geq 4$  съществуват безбройно много естествени числа  $n$ , които делят  $a^n - 1$ , но не се делят на квадрат на просто число.

*Олег Мушкаргов, Николай Николов*