Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически състезания
Русе, 31 януари 2004 г.

Тема за 11 клас

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$4^x - (a^2 + 3a - 2)2^x + 3a^3 - 2a^2 = 0$$

има единствено решение.

Александър Иванов, Емил Колев

Задача 11.2. Точка M от страната AB на $\triangle ABC$ е такава, че радиусите на вписаните окръжности в $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ са равни. Центровете на двете окръжности са означени съответно с O_1 и O_2, а допирните им точки със страната AB са съответно P и Q. Известно е, че $\dfrac{S_{ABC}}{S_{PQO_2O_1}} = 6$.

а) Да се докаже, че $10CM + 5AB = 7(AC + BC)$.

б) Да се намери отношението $\dfrac{AC + BC}{AB}$.

Емил Колев

Задача 11.3. Нека $a > 1$ е фиксирано естествено число. Редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ е зададена с равенствата $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $a_{n+2} = a.a_{n+1} - a_n$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че съществуват безбройно много прости числа, всяко от които дели поне един член на дадената редица.

Александър Иванов