

Министерство на Образованието и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни Математически Състезания
Варна, 8 февруари 2003 г.

Тема за 11 клас

Задача 11.1. Нека $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:

а) $n \leq a_n^2 < n + \sqrt[3]{n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{n}) = 0$.

Николай Николов

Задача 11.2. Нека M е вътрешна точка за $\triangle ABC$. Правите AM , BM и CM пресичат страните BC , CA и AB съответно в точки A_1 , B_1 и C_1 така, че $S_{CB_1M} = 2S_{AC_1M}$. Да се докаже, че A_1 е среда на BC тогава и само тогава, когато $S_{BA_1M} = 3S_{AC_1M}$.

Олег Мушкаров

Задача 11.3. Александър попълва с естествено число някой от коефициентите на уравнение от четвърта степен, след това Елица попълва също с естествено число друг от коефициентите и т.н., докато бъдат попълнени и петте коефициента. Александър печели, ако полученото уравнение има целочислен корен, а в противен случай печели Елица. Да се обоснове кой от двамата има печеливша стратегия.

Николай Николов

Време за работа 4.5 часа.