Министерство на Образованието и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни Математически Състезания
Варна, 8 февруари 2003 г.

Тема за 10 клас

Задача 10.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $\sqrt{ax^2+ax+2}=ax+2$ има единствен корен.

Александър Иванов, Емил Колев

Задача 10.2. Дадени са окръжностите k_1 и k_2 с центрове O_1 и O_2 и радиуси R_1 и R_2, като $R_1=4$, $R_2=16$ и $O_1O_2=25$. Окръжност k се допира до k_1 в точка A и до k_2 в точка B, като k_1 е вътрешна за k, а k_2 е външна за k.

а) Да се докаже, че отсечката AB минава през постоянна точка, независеща от k.

б) Ако P и Q са пресечните точки съответно на k_1 и k_2 с O_1O_2, като O_1 е между P и Q, а Q е между O_1 и O_2, да се докаже, че точките P, A, Q и B лежат на една окръжност.

в) Да се намери минималната възможна стойност на AB, когато окръжността k се мени.

Стоян Атанасов, Емил Колев

Задача 10.3. Нека A е множеството от всички редици от 0 и 1 с дължина 4. Две такива редици ще наричаме *съседни*, ако съвпадат или ако се различават в точно един член. Нека M е подмножество на A със свойството: За всеки два елемента a и b на A съществува елемент на M, който е съседен на a, но не е съседен на b или е съседен на b, но не е съседен на a. Колко най-малко елемента може да има множеството M?

Иван Ланджев, Емил Колев

Време за работа 4.5 часа.