ПЕТИ СОФИЙСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР - 15.11.2003 г.

9-12 клас

Задача 1. Да се пресметне стойността на израза $\dfrac{x+y}{x-y}$, ако $x^2-2\sqrt{6}y^2+\sqrt{3}xy=2\sqrt{2}xy$ и $x<y<0$.

А) $\dfrac{7}{9+4\sqrt{2}}$ Б) $\dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}$ и $2-\sqrt{3}$

В) $\dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}$ Г) $2-\sqrt{3}$

Задача 2. Броят на наредените четворки (a, b, c, d) от естествени числа, за които $a<b<c<d$ и $abcd+1=2003$, е равен на:

А) 5 Б) 6 В) 7 Г) 8

Задача 3. Стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $x^2-6|x|+6-a=0$ има точно два реални корена, са:

А) $a\in(-3;+\infty)$ Б) $a\in[-3;6)$

В) $a\in\{-3\}\cup(6;+\infty)$ Г) $a\in[-3;+\infty)$

Задача 4. Височините AM, BN и CP на остроъгълния ΔABC се пресичат в точка H. Ако периметърът $P_{\Delta MNP}=a$, $CP=3\sqrt{3}$ и $AB=6$, то радиусът на описаната около ΔABH окръжност е:

А) $\dfrac{36\sqrt{3}}{a}$ Б) $\dfrac{a\sqrt{3}}{18}$ В) $2\sqrt{3}$ Г) $\dfrac{18\sqrt{3}}{a}$

Задача 5. Ако $x^2-7x+12\leq 0$, $a=x^2+7x+12$ и $b\in[3;4]$, то стойностите на израза $\dfrac{-1-ab}{b}$ са от интервала:

А) $\left[-4\frac{1}{3};-3\frac{1}{4}\right]$ Б) $\left[-56\frac{1}{3};-42\frac{1}{4}\right]$

В) $\left[-56\frac{1}{4};-42\frac{1}{3}\right]$ Г) $\left[-56\frac{1}{4};-3\frac{1}{4}\right]$

Задача 6. Ако $18^y = 216$, а $xy = 3$, то 6^x е:

А) 72 **Б)** 18 **В)** 216 **Г)** $\sqrt{6}$

Задача 7. Ако a е реален параметър, за който уравнението $x^2 - 3ax - a = 0$ има два реални и различни корена x_1 и x_2, то за всяко такова a стойностите на израза $3ax_1 + x_2^2 - a$ са:

А) отрицателни **Б)** положителни
В) неотрицателни **Г)** неположителни

Задача 8. В равнобедрения трапец $ABCD$, основата $AB = a$, а ъгъл DAB е равен на $60°$. Ако окръжностите, вписани в триъгълниците ABC и ACD, се допират в точка T, лежаща на диагонала AC, то периметърът на трапеца $ABCD$ е равен на:

А) $2a$ **Б)** $2\frac{2}{3}a$ **В)** $3a$ **Г)** друг отговор

Задача 9. Броят на всички цели числа k, за които неравенството $x^2 < 10 - \sqrt{k}$ има решение цяло положително число, е:

А) 9 **Б)** 80 **В)** 81 **Г)** 100

Задача 10. Неравенството $\frac{(x^2-4)(2x+1)(x-2)}{2x^2+x} \leqq 0$ е еквивалентно на:

А) $\left|\begin{array}{l} \frac{x+2}{x} \leqq 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Б) $\left|\begin{array}{l} \frac{x+2}{x} \leqq 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{array}\right.$

В) $\left|\begin{array}{l} (x+2)x \leqq 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Г) $\left|\begin{array}{l} (x-2)^4(x+2)x \leqq 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Задача 11. Басейн се пълни от 3 тръби. Първа и втора тръба заедно пълнят басейна за z минути, втора и трета – за x минути, а трета и първа – за y минути. За колко минути първа тръба ще напълни сама басейна?

А) $\dfrac{2xyz}{xz+xy-yz}$ **Б)** $\dfrac{xyz}{2(xz+xy-yz)}$

В) $\dfrac{2xyz}{xz+yz-xy}$ **Г)** $\dfrac{xyz}{2(yz+xy-xz)}$

Задача 12. Окръжностите $k_1(O_1;8)$ и $k_2(O_2;18)$ се допират външно. Общите им външни допирателни се пресичат в точка S. Дължината на отсечката SO_1 е:

А) 20,8 **Б)** 18,5 **В)** 16,2 **Г)** 22,6

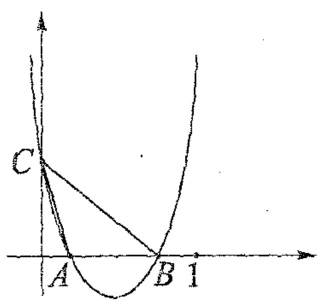
Задача 13. Точките M и P са произволни точки съответно от страните AC и BC на ΔABC. Ако са верни точно две от следните твърдения:

1. $AM = MC$ 2. $BP = PC$
3. $MP = AB/2$ 4. $MP \parallel AB$, то:

А) AB е най-голямата страна в ΔABC **Б)** $AB < AC$

В) AB не е най-голямата страна в ΔABC **Г)** $AB < BC$

Задача 14. Даден е квадратният тричлен $f(x) = x^2 - bx + c$, който има два реални корена x_1 и x_2 в интервала (0; 1). Ако точките A, B и C са пресечните точки на графиката на $f(x)$ с координатните оси (виж чертежа), то лицето на ΔABC е:



А) по-малко от $1/8$ **Б)** в интервала $(1/8; 1/4)$

В) надминава $1/8$ **Г)** надминава $1/4$

Задача 15. *Да се намерят естествените числа m и n, ако е известно, че m.n е трицифрено число, което е точен куб, а* $\dfrac{m}{n}$ *е точен квадрат.*