МАТЕМАТИКА ЗА ВСЕКИ

ЧЕТВЪРТИ СОФИЙСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР - 23.11.2002 г.

9-12 клас

Задача 1. Кое неравенство **не** е вярно:

А) $-2\sqrt{2002} > -4\sqrt{1001}$ Б) $\left(3\sqrt{5} + \sqrt{7}\right)^2 > 51 + 6\sqrt{35}$

В) $\sqrt{6-4\sqrt{2}} > 2-\sqrt{2}$ Г) $\dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}} < \dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

Задача 2. Ако $a > 9$, то най-малкото от следващите числа е:

А) $\dfrac{9}{a}$ Б) $\dfrac{9}{a-1}$ В) $\dfrac{8}{a-1}$ Г) $-\dfrac{1-a}{8}$

Задача 3. За кои стойности на параметъра p частното от корените на уравнението $x^2 + px + 2p + 1 = 0$ е равно на $p - 1$?

А) 0 и 2 Б) –2 В) –3 Г) няма такова p

Задача 4. Дадена е функцията $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x + |x|}$ и $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Кое от следните твърдения е вярно?

А) Графиката на функцията $f(x)$ е права

Б) Функцията $f(x)$ приема отрицателни стойности

В) Графиката на функцията $f(x)$ е лъч

Г) Графиката на функцията $f(x)$ представлява два лъча, с общо начало

Задача 5. Колко двойки естествени числа са решения на системата

$$\begin{cases} x + y = 84 \\ \text{НОД}(x, y) = 7, \end{cases}$$ (НОД – най-голям общ делител)?

А) 20 Б) 3 В) 4 Г) 6

Задача 6. Страните на правоъгълника $ABCD$ са съответно a и b ($a > b$). Точка M е средата на BC, а N е пресечната точка на AC и DM. Върху отсечката DN е взета точка P такава, че $DP : NM = 1 : 2$. Лицето на ΔAPD е:

А) $\dfrac{ab}{4}$ Б) $\dfrac{ab}{12}$ В) $\dfrac{ab}{6}$ Г) $\dfrac{2ab}{3}$

Задача 7. Нека N е 2002-цифрено число, което се дели на 9. С M е означен сборът на цифрите на числото N, а с P – сборът на цифрите на числото M. Най-голямата възможна стойност на P е:

А) 45 **Б)** 459 **В)** 36 **Г)** друг отговор

Задача 8. Решенията на уравнението

$$(2x^2-6)\sqrt{15-4\sqrt{14}}=\left(\sqrt{28}-\sqrt{32}\right)x \text{ са:}$$

А) $\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ **Б)** $3\sqrt{7}-2$ **В)** $\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ **Г)** друг отговор

Задача 9. Ако $\dfrac{27}{x^3}-x^3=-10$, то стойността на израза $9x-\dfrac{27}{x}$ е:

А) 9 **Б)** –9 **В)** ± 9 **Г)** –1

Задача 10. Отсечките CD и AE са височини в остроъгълния ΔABC. Точките M и N са среди съответно на AB и CH ($CD\cap AE$ в т. H). Ако $\sphericalangle MNE=\alpha$, големината на $\sphericalangle MDE$ е:

А) α **Б)** 2α или $180^\circ-2\alpha$

В) α или $180^\circ-\alpha$ **Г)** друг отговор

Задача 11. Дадени са функциите $f(x)=-2x^2$ и $g(x)=3x+1$. Най-малката стойност на израза

$$\frac{1}{f(g(x))-g(f(x))-2002} \text{ е:}$$

А) $-\dfrac{1}{2010}$ **Б)** $-\dfrac{1}{2008}$

В) $-\dfrac{1}{2002}$ **Г)** няма такава стойност

Задача 12. За кои стойности на параметъра a уравнението $(x^2-a)^2-6x^2+4x+2a=0$ има точно три различни реални корена?

А) –1 **Б)** $\sqrt{2}$ и –2 **В)** –1 и $-\dfrac{3}{4}$ **Г)** –2

Задача 13. Четириъгълникът $ABCD$ с лице S е описан около окръжност k с център O, като $AO = CO$ и $BO = DO$. Намерете лицето на кръга с контур окръжността k, ако $\sphericalangle BAD = 30°$.

А) $\frac{\pi}{8}.S$ **Б)** $\frac{\pi}{6}.S$ **В)** $\frac{\pi}{4}.S$ **Г)** друг отговор

Задача 14. За реалните числа a, b, c и d, които са различни от 0, е вярно равенството: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{c}{d}+\frac{d}{c}$. Кое от следните твърдения е вярно:

А) или $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, или $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

Б) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

В) или $\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$, или $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

Г) числата $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{d}$ и $\frac{d}{c}$ не могат да бъдат сравнявани помежду си

Задача 15. *Поведението на билярдна топка е напълно определено – топката се движи праволинейно, а когато срещне преграда (която приемаме за права), ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване.*

Във вътрешността на ъгъл с връх M е взета точка A. Билярдна топка тръгва от A, отразява се от едното рамо на ъгъла в точка B, след това стига другото рамо на ъгъла в точка C и се връща в A. Да се докаже, че центърът на описаната около ΔMBC окръжност лежи на правата MA.