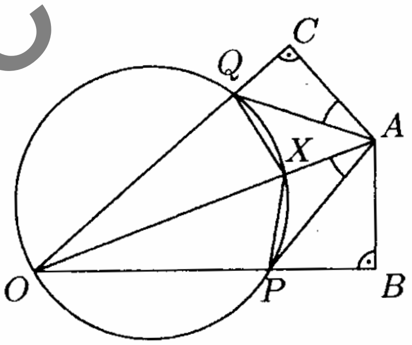
9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение $x^2 + (a+2)x + a - 1 = 0$ удовлетворяват равенството $x_1 + \dfrac{1}{1+x_1} + x_2 + \dfrac{1}{x_2 - 1} = 0$.

Отговор. $a = -2$ и $a = -3,5$.

9.2. От точка A, лежаща на ъглополовящата на остър ъгъл с връх точка O са спуснати перпендикуляри AB и AC към раменете му. Върху отсечките OB и OC са избрани съответно точки P и Q така, че $\sphericalangle OAP = \sphericalangle CAQ$. Да се докаже, че центърът на описаната окръжност за $\triangle APQ$ лежи на отсечката OA.

Решение. Да означим с X центъра на описаната окръжност за $\triangle APQ$. Тогава



$$\begin{aligned}\sphericalangle PXQ &= 2\sphericalangle PAQ = 2(\sphericalangle OAP + \sphericalangle OAQ) = \\ &= 2(\sphericalangle CAQ + \sphericalangle OAQ) = 2\sphericalangle CAO = \\ &= 2(90^\circ - \sphericalangle AOC) = 180^\circ - \sphericalangle BOC,\end{aligned}$$

т.е. X лежи на описаната около $\triangle OPQ$ окръжност.

Освен това имаме $XP = XQ$ и следователно X е средата на дъгата $\widehat{PQ}$. Понеже $\sphericalangle BOA = \sphericalangle COA$, то OA минава през средата на тази дъга и следователно $X \in OA$.

9.3. За естествено число $n > 1$ нека $s(n)$ е най-малкият естествен делител на n, който е по-голям от 1. Да се намерят всички естествени числа a и b, за които $a^2 + b^2 = s(a)^2 + 3s(b)^4$.

Решение. Да отбележим, че $s(a)$ и $s(b)$ са прости числа и да означим $a = s(a)k$ и $b = s(b)\ell$, където k и ℓ са естествени числа. Разглеждането на даденото равенство по модул 4 лесно отхвърля случая, когато $s(b)$ е нечетно (понеже $n^2 \equiv s^2(n) \pmod 4$). Следователно $s(b) = 2$ и от $s(a)^2(k^2 - 1) = 4(12 - \ell^2)$ получаваме решенията $(a, b) = (4, 6)$ и $(6, 4)$.

9.4. Дадена е таблица 100×100, клетките на която са запълнени с естествени числа, ненадвишаващи 100. След всеки ред (под всеки стълб) била записана сумата на съдържащите се в реда (стълба) числа, след което числата в таблицата били изтрити. Само по записаните суми Иван успял напълно и еднозначно да възстанови всички числа в таблицата. Колко най-много измежду числата в таблицата може да са били седмици?

Решение. Отговор – 198. Нека P, Q, R, S да бъдат числата от общите клетки на някои два реда и два стълба. Поне две от тези числа трябва да са от множеството $\{1, 100\}$. Действително, в противен случай, ако например само P е от това множество, при $P \neq 100$ можем да получим друга наредба чрез замяната $P, Q, R, S \to P+1, Q-1, R+1, S-1$, а при $P \neq 1$ – извършвайки замяната $P, Q, R, S \to P-1, Q+1, R-1, S+1$, докато по условие наредбата трябва да е единствена.

Оттук следва, че за всяка клетка, съдържаща числото 7, или стълбът ѝ, или редът ѝ не съдържат други седмици. Да съпоставим на всяка седмица минаващата през нея празна линия (ред или стълб, несъдържащ друга седмица). Ако седмиците са поне 199, то линиите от единия вид (редове или стълбове) са 100, откъдето следва, че седмиците са общо не повече от 100, противоречие.

Следователно седмиците са не повече от 198. Точно 198 седмици ще имаме, ако $A_1 = 793, A_2 = A_3 = \cdots = A_{100} = 106, B_1 = 793, B_2 = B_3 = \cdots = B_{100} = 106$. В този случай таблицата се възстановява еднозначно. Действително, числата в първия стълб от втори ред надолу са не по-големи от 7, от сумите по редове, и тогава трябва да са точно равни на 7, от сумата в първия стълб. Оттук следва единствен избор за 100 в горната лява клетка и 1 в таблицата 99×99 под първия ред и стълб, оттам на 7 в първия ред.