8.1. Даден е успоредникът $ABCD$, два от ъглите на който имат разлика 120°. Ъглополовящите на ъглите при A и B се пресичат в точката O. Лицето на $\triangle ABO$ е 18 кв.см и $AD = 9$ см. Да се пресметне лицето на $\triangle CDO$.

Отговор. 9 кв.см.

8.2. Да се докаже, че за всеки две числа $a \geqq 1$ и $b \geqq 1$ е в сила неравенството $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geq ab(a+b) + a + b$. Кога се достига равенство?

Решение. Разликата $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 - ab(a+b) - a - b$ преобразуваме до $ab(a-1)(b-1) + (a-1)(b-1) + (a-b)^2$, откъдето твърдението следва. Равенство се достига само за $a = b = 1$.

8.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които $20n^2 + n - 1 = p^2q$, където p и q са прости числа и $p^2 = q + 8$.

Решение. Имаме $p^2q = (4n+1)(5n-1)$. От равенството $5(4n+1) - 4(5n-1) = 9$ следва, че най-големият общ делител на $4n+1$ и $5n-1$ е делител на 9. Ако приемем, че числата $4n+1$ и $5n-1$ се делят на 3, то $p = 3$ и тогава $q = 1$, а това е невъзможно. Следователно тези множители са взаимно прости. Проверяваме, че $n > 2$ и тогава $4n + 1 < 5n - 1$. Следователно $4n + 1 = q$ и $5n - 1 = p^2$, откъдето

$$8 = p^2 - q = (5n-1) - (4n+1) = n - 2.$$

Получаваме $n = 10$ и $p^2q = 20.100 + 10 - 1 = 2009 = 7^2.41$.

8.4. Нека s е естествено число. Една квадратна таблица 3×3 ще наричаме s-вълшебна, ако в полетата ѝ са поставени девет последователни естествени числа, така че сборът на числата във всяко от четирите квадратчета 2×2 да бъде s и сборът на числата в четирите ъгъла също да бъде s. Колко са всички s-вълшебни таблици, за които $s < 2009$? (Завъртанията и отраженията на дадена таблица се считат за различни таблици.)

Решение. Нека първо намалим всяко от числата с еднакво количество, така че да получим числата 1, 2, ..., 9 (които са най-малките възможни числа). Получаваме таблицата вдясно.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Ако съберем числата в четирите квадратчета 2×2 и сбора на числата в четирите ъгъла, и като вземем предвид, че $a+b+c+d+e+f+g+h+i = 45$, получаваме $5s = 2.45 + 2e$. Следователно e е кратно на 5 и значи $e = 5$, откъдето $s = 20$. Сравнявайки сборовете в съседни квадратчета 2×2, получаваме $a + b = g + h$, $b + c = h + i$, значи $a - h = g - b = g - h + c - i$. Така $a + i = c + g = \frac{s}{2} = 10$.

Случай А. Ако a и c са с различна четност, то в ъглите има две четни и две нечетни числа, значи в средите на страните също има по две от вид.

Тогава на някоя от страните имаме поред четно, четно, нечетно и след подходящо завъртане и/или отражение можем да считаме, че това са съответно a, b, c. Като имаме предвид, че $e = 5$ и $s = 20$, получаваме следните четности:

ч	ч	н
н	н	ч
н	н	ч

Но $a + i = 10$ и следователно сборът на другите две четни числа е $b + f = 10$. Понеже $e = 5$ и $s = 20$, получаваме $c = 5$ – противоречие.

Случай Б. Ако a и c са с еднаква четност, то четирите числа в ъглите са с еднаква четност, а четирите числа в средите на страните са с противоположната четност. Понеже s е четно, трябва последните да са четни, а ъгловите – нечетни. Щом $a+i = 10$ и $c+g = 10$, след подходящо завъртане и/или отражение можем да считаме, че $a = 1$, $c = 3$.

Тогава $b+d = 20-a-e = 14$, така че $\{b; d\} = \{6; 8\}$. Ако $b = 6$, то $f = 20-6-3-5 = 6$ – противоречие. Остава $b = 8$, $d = 6$ и таблицата е определена еднозначно.

1	8	3
6	5	4
7	2	9

Понеже имаме 4 възможности за избор на ъгъла с „1“и още 2 възможности на този с „3“, има осем 20-вълшебни таблици. Ако увеличим числата до първоначалната им стойност, s се увеличава с четирикратната стойност на това увеличение. Така s може да приема всяка от стойностите $5.4, 6.4, 7.4, ..., 502.4 = 2008$, т.е. $502 - 4 = 498$ възможности. Следователно търсеният брой е $8.498 = 3984$.