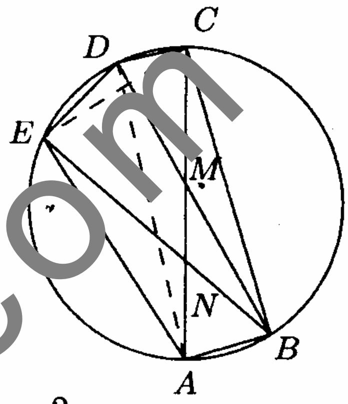
12.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството $\log_{x+a} x \leq \log_a x$ има решения с разлика a.

Отговор. $a > 1$.

12.2. В окръжност е вписан петоъгълник $ABCDE$, като AC е диаметър, $AE = 2CE$ и $AD = 10CD$. Нека M и N са пресечните точки на AC съответно с BD и BE. Да се намери отношението $\dfrac{AB}{BC}$, ако дължините на отсечките AN, NM и MC образуват аритметична прогресия (в този ред).



Решение. Нека $\sphericalangle AEB = \alpha$. Тогава $\sphericalangle ACB = \alpha$ и $\sphericalangle BEC = 90^\circ - \alpha$. Полагаме $x = \dfrac{AB}{BC} = \operatorname{tg} \alpha$. Тогава

$$\frac{AN}{CN} = \frac{S_{ANE}}{S_{CNE}} = \frac{AE.NE \sin\alpha}{CE.NE \sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{AE}{CE} \operatorname{tg} \alpha = 2x.$$

Тъй като $AN + NC = AC$, то $AN = \dfrac{2x}{2x+1} AC$. Аналогично $\dfrac{AM}{CM} = \dfrac{AD}{CD} \cdot \dfrac{AB}{CB} = 10x$, откъдето $AM = \dfrac{10x}{10x+1} AC$ и $MC = \dfrac{AC}{10x+1}$. Тогава

$$MN = AM - AN = \left(\frac{10x}{10x+1} - \frac{2x}{2x+1}\right) AC = \frac{8x}{(2x+1)(10x+1)} AC.$$

От $AN + MC = 2MN$ следва, че

$$\frac{2x}{2x+1} + \frac{1}{10x+1} = \frac{16x}{(2x+1)(10x+1)}.$$

След привеждане под общ знаменател получаваме $20x^2 - 12x + 1 = 0$, откъдето $x = \dfrac{1}{2}$ и $x = \dfrac{1}{10}$ (и двете възможности се реализират).

12.3. Пул е поставен в един от върховете на правилен 2009-ъгълник. Редувайки се, двама местят пула по следните правила. Първият може да го мести в съседен връх и да маркира този връх (ако не е маркиран), а вторият – в един от двата най-отдалечени върха. Колко най-много върха със сигурност може да маркира първият (независимо от ходовете на втория)?

Решение. Ще докажем, че първият може да маркира 1006 върха.

Да номерираме върховете от 0 до 2008 (по часовниковата стрелка). Можем да считаме, че отначало първият мести пула във връх 0 и го маркира. Вторият може да го премести в 1004 или 1005 и след ход на първия по часовниковата стрелка пулът попада в 1005 или 1006. Сега ходът на втория премества пула в 0, 1 или 2 и във всички случаи първият може да го постави в 1 или 2. Горните разсъждения показват, че от всеки два последователни върха първият може да маркира поне един.

Тъй като 2009 е нечетно число, то не е възможно от всеки два последователни върха да е маркиран точно един (тогава трябва да са маркирани върхове $0, 2, 4, \dots, 2008$ и 0 и 2008 са съседни). Следователно съществуват два съседни маркирани върха, нека са 0 и 2008. Ако има други два съседни маркирани върха, лесно се вижда, че са маркирани поне 1006 върха. Ако такива няма, то са маркирани точно върховете $0, 2, 4, 6, \dots, 2006, 2008$. При това първият може да премести пула във връх 1004. Тогава вторият трябва да мести в 0 или 2008, след което първият ще маркира 1 или 2007, т.е. общо ще бъдат маркирани 1006 върха.

Стратегията на втория, при която не могат да бъдат маркирани повече от 1006 пула е следната. Ако пулът не е във връх 1004, вторият мести във връх с нечетно число. Ако пулът е в 1004, той мести в 0. При тази стратегия първият може да маркира само върхове $0, 1, 2, 4, 6, \dots, 2006, 2008$, т.е. 1006 върха.

Забележка. При $(2n+1)$-ъгълник отговорът е $2\left[\dfrac{n}{2}\right] + 2$.

12.4. Дадено е цяло число m. Да се намери броят на редиците $a_1, a_2, \dots$ от цели числа такива, че $a_n a_{n+2} = n^2 + m$ за всяко n.

Решение. Ако една редица $a_1, a_2, \dots$ удовлетворява условието, то редицата, получена чрез промяна на знаците на всички (или само на четните или само на нечетните) членове също го удовлетворява. Следователно за всяка редица $a_1, a_2, \dots$ от естествени числа, която удовлетворява условието, съществуват 4 редици от цели числа, които също удовлетворяват условието. Нека $a_1, a_2, \dots$ е редица от естествени числа.

Полагаме $d_n = a_{n+2} - a_{n-2}$ при $n \geq 3$ и тогава $a_n d_n = n^2 - (n-2)^2 = 4(n-1)$. Оттук $d_n d_{n+2} = 16\dfrac{n^2-1}{n^2+m}$. Понеже $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2+m} = 1$ и $d_n d_{n+2} \in \mathbb{Z}$, следва, че $d_n d_{n+2} = 16$ за всяко достатъчно голямо n. Значи $m = -1$ и $d_n d_{n+2} = 16$ за всяко $n \geq 3$. В частност, $d_n = d_{n+4}$.

Тъй като d_{2k} дели $4(2k-1)$, d_{2k+2} дели $4(2k+1)$ и $d_{2k}d_{2k+2} = 16$, лесно следва, че $d_{2k} = 4$ за всяко $k \geq 2$ и тогава $a_{2k} = 2k - 1$ за всяко k.

По-нататък, d_{4k-1} дели $8(2k-1)$ и от $d_{4k-1}d_{4k+1} = 16$, следва, че съществува $s \in \{0, 1, 2, 3\}$ така, че $d_{4k-1} = 2^s$ за всяко k. Тогава $a_{4k-1} = 2^{3-s}(2k-1)$ и $a_{4k-3} = 2^s(k-1)$.

Тъй като $s = 0, 1, 2, 3$, то редиците от естествени числа, изпълняващи условието на задачата, съществуват само при $m = -1$ и техният брой е 4. Следователно търсеният брой е 16.