Американска Фондация за България
Съюз на Математиците в България
Министерство на Образованието, Младежта и Науката

Есенен Математически Турнир
София, 20 – 22 ноември 2009 г.

Тема за 11. клас

Задача 1. Да се намерят всички реални числа b и c, за които уравнението $x^2 - bx + c = 0$ има два различни реални ненулеви корена x_1 и x_2 и числата x_1, x_2, b и c (в някакъв ред) образуват аритметична прогресия.

Задача 2. Даден е четириъгълникът $ABCD$, за който $AB=BC$ и $\angle DAB = \angle DCB = 90^\circ$. Върху отсечките AD и DC са избрани съответно точки X и Y, за които $\angle CBY = \angle DBX$. Нека O е центърът на описаната окръжност за ΔBXY.

а) Да се докаже, че O лежи на отсечката BD.

б) Да се докаже, че O съвпада с ортоцентъра на ΔADC тогава и само тогава, когато O съвпада с медицентъра на ΔIAC, където I е центърът на вписаната в ΔDXY окръжност.

Задача 3. Числата $к, к+1, к+2, ..., 6к-1, 6к$ са записани в редица в произволен ред. Да се докаже, че съществува естествено число, което може да се представи по два различни начина като сбор на няколко (възможно един) последователни члена на тази редица.

Задача 4. Нека m и n са естествени числа. Да означим с A броят на двойките (i, j), $i>j$, $i, j \in \{1,2,...,n\}$, за които $i-j$ се дели на m. Редица $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ от естествени числа, за които $a_i \in \{1,2,...,m\}$ за всяко $i, 1 \le i \le n$ наричаме ***добра***, ако броят на двойките (i, j), $i>j$, за които $a_i = a_j$ е равен на A. Да се намери броят на добрите редици.

Време за работа: 4.5 часа