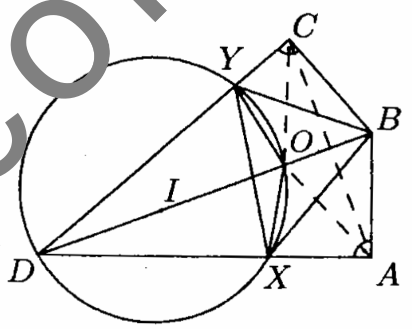
11.1. Да се намерят всички реални числа b и c, за които уравнението $x^2 - bx + c = 0$ има два различни реални ненулеви корена x_1 и x_2 и числата x_1, x_2, b и c (в някакъв ред) образуват аритметична прогресия.

Отговор. $(b, c) = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $(0, -4)$ и $(6, 8)$.

11.2. Даден е четириъгълникът $ABCD$, за който $AB = BC$ и $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = 90^\circ$. Върху отсечките AD и DC са избрани съответно точки X и Y, за които $\sphericalangle CBY = \sphericalangle DBX$. Нека O е центърът на описаната окръжност за $\triangle BXY$.

а) Да се докаже, че O лежи на отсечката BD.

б) Да се докаже, че O съвпада с ортоцентъра на $\triangle ADC$ тогава и само тогава, когато O съвпада с медицентъра на $\triangle IAC$, където I е центърът на вписаната в $\triangle DXY$ окръжност.



Решение. а) От условието следва, че $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, което означава, че DB е ъглополовяща на $\sphericalangle ADC$. Ако означим $\sphericalangle BDC = \varphi$, то $\sphericalangle XBY = \sphericalangle XBD + \sphericalangle DBY = \sphericalangle DBC = 90^\circ - \varphi$. Тъй като O е център на описаната окръжност за $\triangle BXY$, то $\sphericalangle XOY = 2\sphericalangle XBY = 180^\circ - 2\varphi = 180^\circ - \sphericalangle ADC$.

Следователно O лежи на описаната около $\triangle DXY$ окръжност, като $OX = OY$, т.е. O е средата на дъгата XY от описата около $\triangle DXY$ окръжност. Понеже DB е ъглополовяща на $\sphericalangle XDY$, то $O \in DB$.

б) Пресмятаме $\sphericalangle BYX = \frac{1}{2}\sphericalangle BOX = 90^\circ - \sphericalangle OBX = \sphericalangle BYC$, откъдето получаваме, че YB е ъглополовяща на $\sphericalangle XYC$. Следователно B е център на външновписаната окръжност към XY за $\triangle DXY$. Ще използваме добре известния факт, че O е среда на BI. Нека Z е пресечната точка на AC и OB. Тогава Z е среда на AC. Ако O е ортоцентър за $\triangle ADC$, то $ABCO$ е успоредник (даже ромб) и $OZ = ZB = \frac{1}{2}OI$, което означава, че O е медицентър на $\triangle IAC$. Обратно, ако O е медицентър на $\triangle IAC$, то $OZ = \frac{1}{2}OI = \frac{1}{2}OB$ и $ABCO$ е четириъгълник с разполовяващи се диагонали, т.е. е успоредник. Следователно O е ортоцентър за $\triangle ADC$.

11.3. Числата $k, k+1, k+2, \ldots, 6k-1, 6k$ са записани в редица в произволен ред. Да се докаже, че съществува естествено число, което може да се представи по два различни начина като сбор на няколко (възможно един) последователни члена на тази редица.

Решение. Да допуснем, че такова число не съществува. Да разгледаме числата $k, k+1, \ldots, 3k-1, 3k$. Никои две от тях не могат да бъдат съседни, защото тогава сумата им би била по-малка от $6k$ и би се повторила с някоя сума с дължина едно. Следователно, между тези $2k+1$ числа имаме поне $2k$ позиции, които трябва да запълним с останалите $3k$ числа. Но тогава в поне k от позициите трябва да поставим по едно число. Това означава, че имаме поне k на брой суми с дължина три от вида $a+x+b$, където $a, b \in [k, 3k]$ и $x \in [3k+1, 6k]$. Най-голямата стойност на такава сума е $12k-1$. По този начин, в интервала $[k, 12k-1]$ трябва да се съдържат всички суми с дължина едно или две (общо $5k+1+5k$ на брой), както и поне k суми с дължина три. Но интервал с дължина $11k$ не може да съдържа $11k+1$ различни числа – противоречие.

11.4. Нека m и n са естествени числа. Да означим с A броя на двойките (i,j), $i>j$, $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, за които $i-j$ се дели на m. Редицата $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ от естествени числа, за която $a_i \in \{1,2,\ldots,m\}$ за всяко $i, 1 \leqq i \leqq n$ наричаме *добра*, ако броят на двойките $(i,j), i>j$, за които $a_i = a_j$ е равен на A. Да се намери броят на добрите редици.

Решение. Нека $n = qm+t$. Ще докажем, че търсеният брой е $\binom{m}{t}$.

За фиксирано $r, 0 \leq r < m$, да означим с x_r броя на числата от 1 до n, които дават остатък r при деление с m. Очевидно $x_1 = x_2 = \cdots = x_t = q+1$ и $x_0 = x_{t+1} = \cdots = x_{m-1} = q$. Тогава броят на двойките (i,j), $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, за които $i-j$ се дели на m, е равен на $A = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{x_r}{2}$. Да забележим, че $\sum_{r=0}^{m-1} x_r = n$ и разликата между най-голямото и най-малкото от числата x_r е 1 (т.е. те са почти равни). Добре известно е, че от всички суми от вида $\sum_{r=0}^{m-1} \binom{t_r}{2}$, за които $\sum_{r=0}^{m-1} t_r = n$, най-малка стойност приема сумата A.

Да означим с y_i за $i = 1,2,\ldots,m$ броя на членовете на редицата $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$, които са равни на i. Тогава $\sum_{r=1}^{m} y_r = n$ и броят на двойките (i,j), за които $a_i = a_j$, е равен на $B = \sum_{r=1}^{m} \binom{y_r}{2}$. Тъй като $B = A$, то числата y_i за $i = 1,2,\ldots,m$ трябва да са почти равни, т.е. t от тях трябва да са равни на $q+1$, а останалите $m-t$ трябва да са равни на q. Такива числа могат да се изберат по $\binom{m}{t}$ (фиксираме местата на по-големите y_i) начина и всеки начин определя еднозначно редицата $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$.