Американска Фондация за България
Съюз на Математиците в България
Министерство на Образованието, Младежта и Науката

Есенен Математически Турнир
София, 20 – 22 ноември 2009 г.

<u>Тема за 10. клас</u>

Задача 1. Нека x, y, a са реални числа и $x+y=a$, $xy=a+3$. Да се намери възможно най-малката стойност на израза x^2+y^2.

Задача 2. Даден е правоъгълният ΔABC с прав ъгъл при върха C, от който е спусната височината CH. Радиусите на окръжностите, вписани в ΔABC, ΔAHC и ΔBHC, са означени съответно с r, r_1 и r_2.

а) Да се докаже, че r, r_1 и r_2 са дължини на страните на правоъгълен триъгълник T.

б) Да се определят ъглите на триъгълника T, ако неговият периметър P е четири пъти по-малък от хипотенузата AB.

Задача 3. В шахматен турнир участвали 3 ученика от десети клас и n ученика от девети клас. Тримата десетокласници спечелили общо 10 точки, а всички деветокласници спечелили по равен брой точки. В турнира има едноличен победител. Да се намерят всички възможни стойности на n.

Забележка: В шахматен турнир всеки участник играе по една партия с всеки друг и получава 1 точка за победа, 0,5 точки при равенство и 0 точки при загуба. Победител е участник с повече точки от всеки друг.

Задача 4. Да се намерят всички прости числа p, за които уравнението $2x^{p-1}+2009=y^{p-1}$ има безбройно много решения в естествени числа.

Време за работа: 4.5 часа