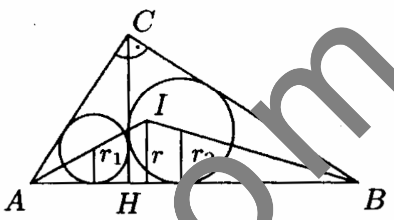
10.1. Нека x, y, a са реални числа и $x + y = a$, $xy = a + 3$. Да се намери възможно най-малката стойност на израза $x^2 + y^2$.

Отговор. 2 (и се достига при $x = y = -1$).

10.2. Даден е правоъгълният $\triangle ABC$ с прав ъгъл при върха C, в който е спусната височината CH. Радиусите на окръжностите, вписани в $\triangle ABC$, $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$, са означени съответно с r, r_1 и r_2.

а) Да се докаже, че r, r_1 и r_2 са дължини на страните на правоъгълен триъгълник T.

б) Да се определят ъглите на триъгълника T, ако неговият периметър P е четири пъти по-малък от хипотенузата AB.



Решение а) От $\triangle ABC \sim \triangle ACH \sim \triangle CBH$ следва, че $r : r_1 : r_2 = AB : AC : BC$, т.е. r, r_1 и r_2 са дължини на страните на триъгълник, подобен на $\triangle ABC$ и в частност – правоъгълен.

б) Тъй като $\triangle ABC$, $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$ са правоъгълни, то

$$\begin{aligned} P &= r + r_1 + r_2 = \\ &= \frac{AC + BC - AB}{2} + \frac{AH + CH - AC}{2} + \frac{BH + CH - BC}{2} = CH. \end{aligned}$$

Тогава от условието следва, че $CH = P = \frac{AB}{4}$, а оттук лесно получаваме, че ъглите на $\triangle ABC$ са 15°, 75° и 90°. Както вече отбелязахме, триъгълникът T е подобен на $\triangle ABC$ и с това задачата е решена.

10.3. В шахматен турнир участвали 3 ученика от десети клас и n ученика от девети клас. Тримата десетокласници спечелили общо 10 точки, а всички деветокласници спечелили по равен брой точки. В турнира има едноличен победител. Да се намерят всички възможни стойности на n.

Забележка. В шахматен турнир всеки участник играе по една партия с всеки друг и получава 1 точка за победа, 0,5 точки при равенство и 0 точки при загуба. Победител е участник с повече точки от всеки друг.

Решение. Нека всеки деветокласник е спечелил k точки. Тогава общият брой на спечелените точки в турнира е $10 + nk$, а от друга страна този брой е $\frac{(n+3)(n+2)}{2}$. След преобразуване достигаме до равенството:

$$14 + 2kn = n^2 + 5n \qquad (*)$$

Оттук, понеже $2k$ е цяло число (*защо?*), следва, че n дели 14.

Ако $n \leqq 2$, то десетокласниците са спечелили в партиите си с деветокласниците най-много $3.2 = 6$ точки и в партиите помежду си още 3 точки, така че са спечелили общо най-много 9 точки, което е противоречие. Следва, че $n > 2$ и значи $n = 7$ или 14.

Нека $n = 14$. Тогава от $(*)$ следва, че $k = 9$. За да има едноличен победител, трябва един от десетокласниците да е спечелил повече от 9 точки и тогава другите двама десетокласници са спечелили общо по-малко от 1 точка. Това обаче е невъзможно, понеже в партията помежду си те са си поделили 1 точка.

Остава $n = 7$. Тогава от $(*)$ следва, че $k = 5$. Този случай се реализира – например един от десетокласниците печели срещу всички други участници и събира 9 точки, другите двама десетокласници завършват наравно помежду си и губят от всички деветокласници, така че събират по 0,5 точки, а всички деветокласници завършват наравно помежду си и събират по $6.0,5 + 2.1 = 5$ точки. Следователно единствената възможност за n е 7.

10.4. Да се намерят всички прости числа p, за които уравнението $2x^{p-1} + 2009 = y^{p-1}$ има безбройно много решения в естествени числа.

Решение. Тъй като p е просто число, то от малката теорема на Ферма

$$0 \equiv 2x^{p-1} + 2009 - y^{p-1} \equiv 2008, 2009, 2010 \text{ или } 2011 \pmod p.$$

Следователно $p = 2, 3, 5, 7, 41, 67, 251$ или 2011.

При $p = 2$ намираме безкраен клас решения $\{(k, 2k + 2009) | k \in \mathbb{N}\}$.

При $p = 3$ уравнението добива вида $2x^2 + 2009 = y^2$. Лесно се проверява, че ако (x_0, y_0) е решение в естествени числа, то $(3x_0 + 2y_0, 4x_0 + 3y_0)$ също е решение в естествени числа и то строго по-големи. От решението $(10, 47)$ стигаме до безкраен клас от решения.

При $p = 5$ уравнението е $2x^4 + 2009 = y^4$. Тъй като възможните остатъци на дясната страна по модул 16 са $\{0; 1; 15\}$, а на лявата – $\{8; 9; 10\}$, то в този случай уравнението няма решение, а в частност и при $p = 41$.

При $p = 7$ уравнението е $2x^6 + 2009 = y^6$. Тъй като възможните остатъци на дясната страна по модул 7 са $\{0; 1\}$, а на лявата – $\{0; 2\}$, то остава $x \equiv y \equiv 0 \pmod 7$, но тогава 7^6 трябва да дели 2009, което е противоречие. Така и в този случай уравнението няма решение, а в частност и при $p = 67$ и $p = 2011$.

При $p = 251$ уравнението е $2x^{250} + 2009 = y^{250}$. Да разгледаме по-общото уравнение $2x^5 + 2009 = y^5$. Тъй като възможните остатъци на дясната страна по модул 11 са $\{0; 1; 10\}$, а на лявата – $\{5; 7; 9\}$, то и в този случай не достигаме до решение.

Окончателно $p = 2$ и $p = 3$ са единствените решения на задачата.

Забележка. При $p = 3$ уравнението има и други решения, например $(14, 49)$, $(20, 53)$, $(46, 79)$, $(56, 91)$ и те формират други безкрайни класове.