Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

5 юни 2010 г.

ТЕМА за 9 – 10 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Даден е равнобедрен ΔABC с $\angle ACB > 90^0$. Височините AM (M лежи на правата BC) и CN ($N \in AB$) се пресичат в точката H. Да се намери дължината на височината CN, ако $AH = 7$ и $HM = 5$.

A) $\sqrt{42}$ **B)** $\sqrt{\frac{7}{6}}$ **C)** $\frac{6}{\sqrt{42}}$ **D)** $6\sqrt{7}$ **E)** 7

2. Кое от посочените числа е корен на уравнението $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$?

A) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **B)** 0 **C)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

3. В редица са записани 2011 числа. Първото число е 3^{2010}, а всяко следващо е равно на сбора от цифрите на предходното число. Да се намери последното число в тази редица.

A) 3^{1005} **B)** 9045 **C)** 3^{335} **D)** 9 **E)** 18090

4. Разглеждаме всички осемцифрени числа, в записа на които участват само цифрите 3 и 7, като всяка от тези цифри участва поне по веднъж. Колко на брой са числата, в записа на които няма две тройки една до друга?

A) 1024 **B)** 128 **C)** 123 **D)** 54 **E)** 51

5. Петоъгълникът $ABCDE$ е вписан в окръжност. Точките A, B и C разделят дъгата DE на четири дъги с равни дължини. Ако лицата на триъгълниците ABC и DEC са съответно S и 3, то лицето на петоъгълника е равно на:

A) $\frac{3S+6+\sqrt{S^2+12S}}{2}$ **B)** $\frac{S+6\pm\sqrt{S^2+12S}}{2}$ **C)** $\frac{3S+2+\sqrt{S^2+12S}}{2}$ **D)** $13+S$ **E)** S^2+12S

6. Дадени са 10 числа, всяко от които е равно на квадрата на сбора на останалите 9 числа. Да се намери сборът на дадените числа.

7. Нека M е множество, чийто елементи са 10 различни цели положителни числа, по-малки от 100. Да се докаже, че:

а) броят на всички подмножества на M, включително празното множество и самото M, е равен на 2^{10};

б) съществуват 2 различни подмножества на M без общи елементи и с равни суми на елементите в тях.