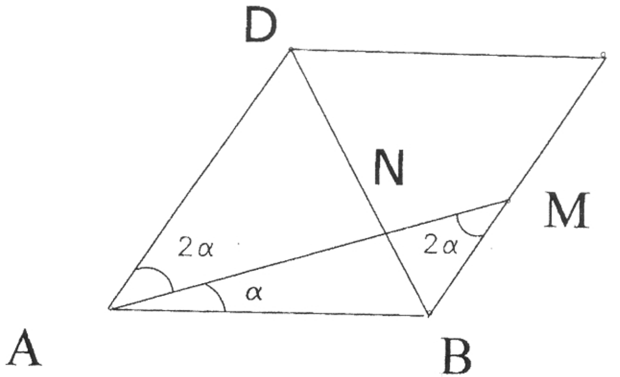
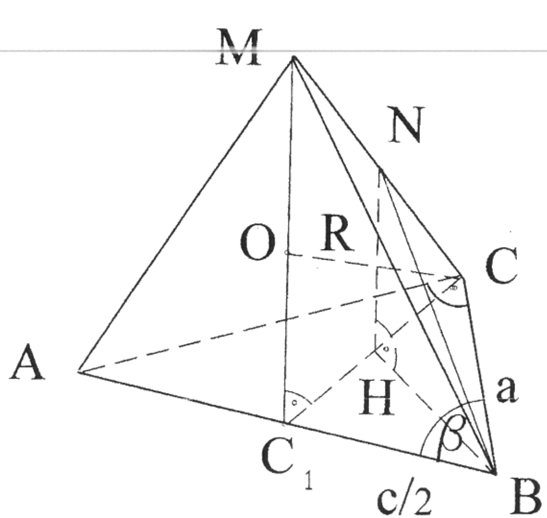
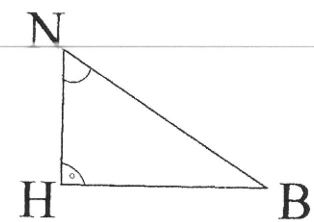


черт. 1





черт. 2

УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ

Катедра “Математика”

бул. “Хр. Смирненски” № 1, 1046 София
http://uacg.bg

ЕКСПРЕСНО ИЗДАНИЕ[1]

Решения на задачите от приемния изпит по

МАТЕМАТИКА

на 13 юли 2010 г.

София
2010

---

[1] Отпечатано в печатната база на УАСГ на 13.07.2010 г.

ТЕМА 3

Задача 1 Дадено е уравнението

$$\log_2(4^x+a^2)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$$

относно x, където a е параметър.

а) (2 точки) Решете уравнението при $a=-2$.

б) (2 точки) Докажете, че за всяко a уравнението има единствено решение x_0 и намерете за кои стойности на a е изпълнено $x_0>3$.

в) (2 точки) Нека $x_0=f(a)$ е решението на уравнението като функция на a и нека $u(a)=2^{f(a)}$. Пресметнете границата

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{u(a)+1}{\sqrt{(u(a)-3)u(a)}}.$$

Решение. **а)** Необходимо е $2^{x+1}-3>0$, откъдето $y=2^x>3/2$ и $x>\log_2(3/2)=\log_2 3-1$. При това $\log_2(y^2+a^2)-\log_2(2y-3)=x$ и $(y^2+a^2)/(2y-3)=y$. Оттук $y^2-3y-a^2=0$. Уравнението за y има два корена, от които само коренът $y_0=(3+\sqrt{9+4a^2})/2$ е по-голям от $3/2$. При $a=-2$ имаме $y_0=4$ и $x=2$.

б) Квадратното уравнение за y от т. а) има единствено положително решение y_0, откъдето следва, че и уравнението за x също има единствено решение $x_0=\log_2 y_0$. От изискването $x_0>3$ получаваме $y_0>2^3=8$ и $\sqrt{9+4a^2}>13$. Така $a^2>40$ и следователно $a\in(-\infty,-2\sqrt{10})\cup(2\sqrt{10},+\infty)$.

в) От а) и б) следва, че $u(a)=y_0$. Така имаме $(u-3)u=a^2$ и $A=(u+1)/\sqrt{(u-3)u}=3/(2|a|)+\sqrt{1+9/(4a^2)}$, $a\neq 0$. Оттук следва, че $A\to 1$ при $a\to-\infty$.

Задача 2 Върху страната BC на ромба $ABCD$ е взета точка M, така че $CM/MB=k$.

а) (3 точки) Известно е, че $\angle AMB=2\angle BAM$. Докажете, че

$$\cos\angle BAM=\frac{k+1}{2}$$

и пресметнете $\cos\angle BAD$.

б) (2 точки) Докажете, че

$$\frac{S_{BMN}}{S_{BAM}}=\frac{1}{2+k},$$

където N е пресечната точка на AM и BD.

в) (2 точки) Докажете, че $S_{BMN}/S_{ABCD}<1/4$.

Решение (черт. 1).

Да положим $BM=x$. Тогава $CM=kx$, а страната на ромба е равна на $(k+1)x$. Да означим $\angle MAB=\alpha$.

а) Разглеждаме ΔAMB, в който $AB=(k+1)x$, $BM=x$, $\angle MAB=\alpha$ и $\angle AMB=2\alpha$. Прилагаме синусова теорема за въпросния триъгълник: $x/\sin\alpha=(k+1)x/\sin 2\alpha$. След елементарни преобразувания (използваме формула за синус на удвоен ъгъл) се получава, че $\cos\alpha=(k+1)/2$. Очевидно $\angle BAD=\pi-\angle ABC=3\alpha$. От добре известната формула получаваме

$$\cos\angle BAD=\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4(k+1)^3/8-3(k+1)/2=\frac{1(k+1)(k^2+2k-2)}{2}$$

.

б) Да отбележим, че триъгълниците AND и BNM са подобни и ако означим $MN=y$, то $MN/NA=BM/AD=1/(k+1)$. Значи $MN/NA=1/(k+2)$. Това отношение е равно на отношението на лицата, защото ΔBMN и ΔABM имат общ връх B и основите им лежат на правата AM.

в) Имаме

$$\frac{S_{BMN}}{S_{ABCD}}=\frac{S_{BMN}.S_{ABM}}{S_{ABM}.S_{ABCD}}<\frac{1}{k+2}\frac{1}{2}<\frac{1}{4},$$

защото $S_{ABM}/S_{ABCD}<1/2$.

Задача 3 Дадена е триъгълна пирамида $ABCM$ с основа ABC и равни околни ръбове. Нека $BC=a$, $\angle ACB=\gamma$, $\angle ABC=\beta$ и нека обемът на пирамидата е a^3.

а) (2 точки) Пресметнете височината h през върха M на пирамидата.

б) (2 точки) Пресметнете радиуса R на описаната около пирамидата сфера, ако $\gamma=90^o$.

в) (3 точки) Нека $\gamma=90^o$. Пресметнете тангенса на ъгъла между медианите MC_1 в триъгълника ABM и BN в триъгълника BCM.

Решение. **а)** Имаме $h=3a^3/S_{ABC}$. Но $S_{ABC}=(a^2\sin\beta\sin\gamma)/(2\sin(\beta+\gamma))$, откъдето $h=(6a\sin(\beta+\gamma))/(\sin\beta\sin\gamma)$.

б) (черт. 2) Точката M се проектира върху центъра на описаната около ΔABC окръжност, който съвпада със средата C_1 на AB. В този случай $S_{ABC}=(a^2\mathrm{tg}\,\beta)/2$ и $h=6a\,\mathrm{cotg}\,\beta$. Нека O е центърът на описаната сфера. От ΔC_1CO имаме $R^2=(h-R)^2+CC_1^2$ и $R=(h^2+CC_1^2)/(2h)$. От друга страна $CC_1=AB/2=a/(2\cos\beta)$. Оттук след преобразувания получаваме

$$R=a\frac{144\cos^4\beta+\sin^2\beta}{48\cos^3\beta\sin\beta}.$$

в) (черт. 2) През M прекарваме $MH\|MC_1$, където H е средата на CC_1. Разглеждаме ΔBNH. Търсеният ъгъл е $\angle BNH$. Имаме $\mathrm{tg}\,\angle BNH=BH/NH$, където $NH=h/2=3a\,\mathrm{cotg}\,\beta$ и BH е медиана в равнобедрения BC_1C със страни $BC=a$, $CC_1=C_1B=a/(2\cos\beta)$. От формулата за медианата след преобразувания получаваме

$BH=(a/4)\sqrt{1+8\cos^2\beta}$. Оттук

$$\mathrm{tg}\,\angle BNH=\frac{\sqrt{1+8\cos^2\beta}}{12\,\mathrm{cotg}\,\beta}.$$