

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

14.07.2010 год.

ВАРИАНТ 3

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1. Решете уравненията:

1.1 $x^2 - 2mx - 3m^2 = 0$ при $m^2 = 1$.

РЕШЕНИЕ: При $m = 1$: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 3$;

При $m = -1$: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_3 = -3; x_4 = 1$.

1.2 $|x - 1| = 2$.

РЕШЕНИЕ: $x_1 = 1 - 2 = -1$; $x_2 = 1 + 2 = 3$.

Задача 2.

2.1 Намерете шестия член на аритметична прогресия с първи член 3 и разлика 10.

РЕШЕНИЕ: $a_6 = a_1 + (6 - 1)d = 3 + 5 \cdot 10 = 53$.

2.2 Решете уравнението

$$4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0.$$

РЕШЕНИЕ: За $t = 4^x$ получаваме системата: $t^2 - 5t + 4 = 0$, $t > 0$, чиито решения са $t_1 = 1$ и $t_2 = 4$.

Съответните решения на показателното уравнение са $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Задача 3. Дадени са функциите $P(x) = \frac{2}{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2}$ и $Q(x) = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2}$.

3.1 Определете дефиниционните им множества.

РЕШЕНИЕ: $D_P = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ е дефиниционното множество на $P(x)$, а $D_Q = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ – на $Q(x)$.

3.2 Опростете израза $P(x) - Q(x)$.

РЕШЕНИЕ:

$$P(x) - Q(x) = \frac{2}{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} - \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2} = \frac{2x - (x^2 + 1)}{(x-1)^2} = -\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = -1, \forall x \in D_P \cap D_Q = D_P.$$

3.3 Намерете локалните екстремуми на $Q(x)$.

РЕШЕНИЕ: $Q'(x) = (x^2 + 1)'(x-1)^{-2} + (x^2 + 1)\left[(x-1)^{-2}\right]'$, следователно
 $Q'(x) = (x-1)^{-3}[2x(x-1) - 2(x^2 + 1)] = -2(x-1)^{-3}(x+1), \forall x \in D_Q.$

В частност, $Q'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0$, откъдето получаваме: в $(-\infty, -1)$ $Q(x)$ е строго намаляваща; в $(-1, 1)$ – строго растяща; в $(1, \infty)$ – строго намаляваща.

Тогава при $x = -1$ функцията $Q(x)$ има локален минимум: $Q(-1) = \frac{1}{2}$.

3.4 Намерете границата $\lim_{x \rightarrow \infty} x.P(x)$.

РЕШЕНИЕ: $\lim_{x \rightarrow \infty} x.P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} = \frac{2}{1} = 2.$

Задача 4. Даден е правоъгълен триъгълник с дължини на катетите 3 см и 4 см. Да се намери дължината на отсечката, успоредна на хипотенузата му, която разполовява лицето на триъгълника.

РЕШЕНИЕ: Хипотенузата на дадения триъгълник е с дължина 5 см. За дължината m на отсечката, която е успоредна на хипотенузата и разполовява лицето на триъгълника, от съответните подобни триъгълници получаваме: $\frac{m^2}{5^2} = \frac{S/2}{S} \Rightarrow m = 5\sqrt{\frac{1}{2}}.$