

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

6 юни 2009 г.

ТЕМА за 9-10 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

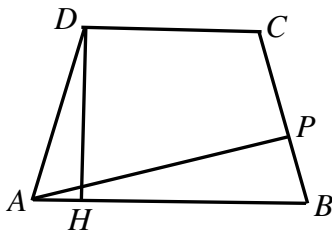
ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Сборът от корените на уравнението $\sqrt{\frac{1}{9} - 2x + 9x^2} = 2 - |x|$ е равен на:

- A) 1 B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 0 E) -1

2. Ако $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$, намерете броя на реалните корени на уравнението $f(f(f(f(x)))) = x$.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) безброй много



3. Нека $ABCD$ е равнобедрен трапец, в който височината DH ($H \in AB$) е равна на голямата основа AB . Точката P лежи върху бедрото BC , като $AP \perp BC$ и $BP:PC = 1:3$. Отношението $AB:CD$ е равно на:

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ E) 3

4. Да се намери числената стойност на многочлена $P(x) = 2x^5 - 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 2$ при $x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

- A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$

5. Върховете на n -ъгълник са написани n различни числа. Ако всяко число е равно на произведението на двете му съседни, то n е равно на:

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6. Нека $a > 0$ е цяло число и $b = a + [\sqrt{a}]$, където с $[m]$ е означена цялата част на m . С числото b постъпваме по същия начин, т.е. нека $c = b + [\sqrt{b}]$. По-нататък нека $d = c + [\sqrt{c}]$ и продължаваме, докато се получи точен квадрат. Например, ако $a = 17$, то последователните стъпки са 21 ($17 + 4$) и 25 ($21 + 4$), а ако $a = 19$, то последователните стъпки са 23 ($19 + 4$), 27 ($23 + 4$), 32 ($27 + 5$), 37 ($32 + 5$), 43 ($37 + 6$) и 49 ($43 + 6$). Ако $a = 2009$, кой е точният квадрат, който се достига по описания начин?

7. Дължините на страните и на височините на равнобедрен триъгълник са естествени числа.

Каква е най-малката възможна стойност на лицето на триъгълника?