Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

6 юни 2009 г.

ТЕМА за 11-12 клас

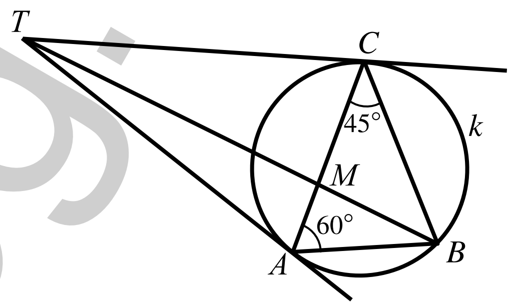
Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Нека $tg\alpha + tg\beta = p$ и $ctg\alpha + ctg\beta = q$, където p и q са различни ненулеви реални числа. Стойността на $tg(\alpha+\beta)$ е:

A) $\frac{pq}{q-p}$ **B)** $\frac{pq}{p-q}$ **C)** $\frac{p-q}{pq}$ **D)** $\frac{q-p}{pq}$ **E)** $\frac{p}{q-p}$

2. На чертежа $\triangle ABC$ е вписан в окръжността k и допирателните към k в точките A и C се пресичат в точка T. Нека BT пресича AC в точка M. Ако $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle ACB = 45^\circ$, отношението $\frac{AM}{MC}$ е равно на:



A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Дадена е редицата $a_n = n\left(\frac{n+1}{6}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots\ldots, 100$. Колко от членовете на тази редица са цели числа?

A) 8 **B)** 16 **C)** 24 **D)** 32 **E)** друг отговор

4. За всяко реално число z означаваме с $[z]$ най-голямото цяло число, което не надхвърля z.

Броят на решенията на системата $\left|\begin{array}{l} x+[y]=\sqrt{2} \\ y+[x]=\sqrt{5} \end{array}\right.$ е:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

5. Намерете броя на реалните корени на уравнението $1-\frac{x^2}{2}=\cos x$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** безброй много **E)** четен брой

6. Дадено е уравнението $\cos(8m-3)x=\cos(14m+5)x$, където m е параметър. Намерете положителните стойности на m, при които неотрицателните решения на уравнението, взети в растящ ред, образуват аритметична прогресия.

7. Нека N е най-малкото 2009-цифрено естествено число, което е кратно на 2009. Колко измежду цифрите на N са нули?