Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

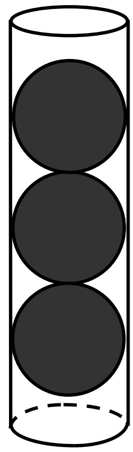
10 юни 2007 г.

ТЕМА за 11-12 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. В цилиндричен съд, пълен догоре с течност, се потапят изцяло три еднакви топки, при което част от течността излиза от съда. Каква възможно най-голяма част от течността може да излезе от съда, ако радиусите на топките са равни на радиуса на основата на цилиндъра?



A) 1 **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{4}{5}$ **D)** $\frac{4}{9}$ **E)** $\frac{2}{3}$

2. Пресметнете стойността на $(tg15^0.\cos15^0 - cotg15^0.\sin15^0)(tg75^0.\cos75^0 - cotg75^0.\sin75^0)$.

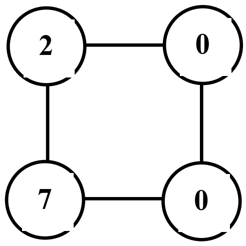
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** $-\frac{1}{2}$ **C)** 0 **D)** 1 **E)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Два от ръбовете на тетраедър са с дължина 3, два са с дължина 4 и два са с дължина 5. Две от стените на тетраедъра са правоъгълни триъгълници, а другите две са равнобедрени триъгълници. Бедрата на единия от равнобедрените триъгълници са с дължина 5. Намерете възможно най-големия обем на един такъв тетраедър?

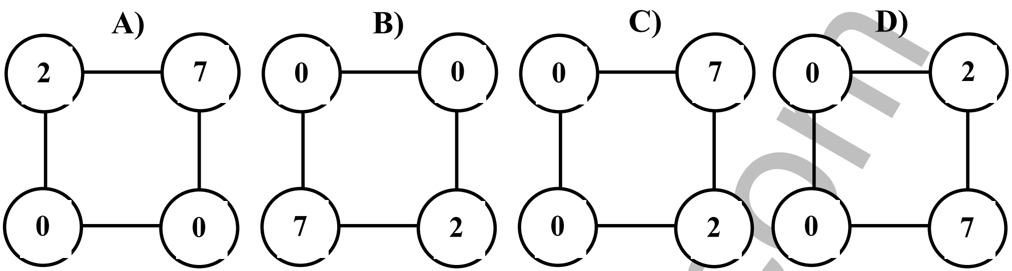
A) 5,97 **B)** $\frac{53}{15}\sqrt{3}$ **C)** $\frac{3}{4}\sqrt{55}$ **D)** $\frac{13}{3}\sqrt{2}$ **E)** $\frac{8}{3}\sqrt{5}$

4. Колко са реалните решения на уравнението $\sin x = \frac{1}{2007\pi}x$?

A) 2007 **B)** 2008 **C)** 4014 **D)** 4015 **E)** 4016

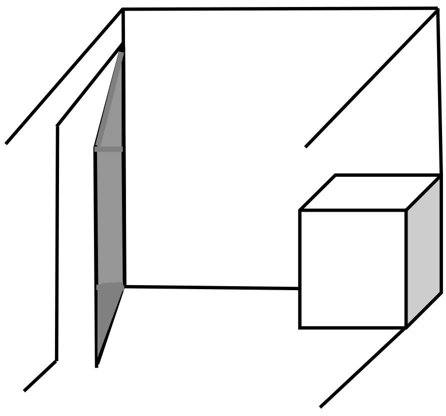


5. Във върховете на квадрата от чертежа са поставени числата 2, 0, 0 и 7. Всеки ход се състои в следното: избира се една от страните на квадрата и към числата в двата й края се прибавя едно и също цяло число. Кой от посочените случаи не може да се реализира с помощта на такива ходове?



E) всичките **A)**, **B)**, **C)** и **D)** могат да се получат

6. В ъгъла на помещение с широчина 10 дм има врата (вж. рисунката), която е със същата широчина 10 дм и в крайно отворено положение стига до другия ъгъл на помещението. Сандък с размери 6 дм, 5 дм и 4 дм трябва да се постави плътно в другия ъгъл на помещението срещу вратата. Намерете броя на разположенията на сандъка, при които крайните възможности за отваряне на вратата са различни.



7. В състезание по математика били зададени 3 задачи, които носели различен брой точки. Резултатите по задачи на първите трима участници в класирането били съответно 13 + 15 + 8 = 36 точки, 7 + 10 + 14 = 31 точки и 10 + 8 + 12 = 30 точки. Да се определят такива коефициенти за всяка задача, които да са естествени числа, сумата им да е възможно най-малка и които да обърнат класирането на първите трима, т.е. ако получените точки по всяка задача се умножат със съответните коефициенти, първият да стане трети, а третият да стане първи (разбира се, при обръщането вторият запазва мястото си).