МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ХАСКОВО

6300 Хасково, ул. "П. Евтимий" № 2, тел./факс 038/62 25 03, e-mail: rio_haskovo@mon.bg

Национална олимпиада по математика
Общински кръг – 25 февруари 2010 год.

ТЕМА ЗА XII КЛАС

Зад. 1 а) Да се реши системата $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9 \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20 \end{cases}$

б) Пресметнете стойността на израза $A=\dfrac{\log_3 64}{\log_3 48-\log_3 6}$

в) Ако $\sin 2\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, намерете стойността на $tg\dfrac{\alpha}{2}$.

7 точки

Зад.2 Дадена е функцията $f(x)=x^4-2x^3-2x^2+3$.

а) намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията, ако $x\in[a;b]$,
където a и b са съответно корените на уравненията

$\sqrt{5x+6+\sqrt{x+10}}=2$ и $0{,}125.4^{x+0{,}75}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$;

б) намерете стойностите на реалния параметър k, за които уравнението $kf^2(x)-2kf(x)+3=0$ има поне едно решение за $f(x)\in[-1;1]$.

7 точки

Зад.3 В триъгълна пирамида ABCD основата е равнобедрен правоъгълен триъгълник с хипотенуза $AB=b\sqrt{2}$. Равнините на стените ABD и ACD са перпендикулярни на основата, а ръбът BD сключва с равнината на основата ъгъл 60°. Да се намерят:

а) обемът на пирамидата;

б) големината на ъгъла между ръба CD и равнината на ABD;

в) големината на двустенния ъгъл с ръб BD.

7 точки

Време за работа : 4 астрономически часа

Желаем Ви успех!

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ -25.02.2010 г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

XII клас

1 зад.

а) След полагане x+y = u и $\frac{x}{y}=t$ се получава системата $\begin{array}{l} u+t=9 \\ u.t=20 \end{array}$ **1 точка**

$\left| \begin{array}{l} u=9-t \\ (9-u).t=20 \end{array}\right.$ наредените двойки, които са решения са $(u,v),(4;5),(5;4)$ **1 точка**

Получаваме системите $\left| \begin{array}{l} x+y=4 \\ \frac{x}{y}=5 \end{array}\right.$ $\left| \begin{array}{l} x+y=5 \\ \frac{x}{y}=4 \end{array}\right.$, от които намираме решенията на

системата $(x,y),(4;1),\left(\frac{10}{3};\frac{2}{3}\right)$ **1 точка**

б) A=$\frac{\log_3 64}{\log_3 48-\log_3 6}=\frac{\log_3 64}{\log_3 \frac{48}{6}}=\frac{\log_3 64}{\log_3 8}=\frac{\log_3 2^6}{\log_3 2^3}=\frac{6\log_3 2}{3\log_3 2}=\frac{6}{3}=2$ **2 точки**

в) Ако $\sin 2\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$ намерете стойността на $tg\frac{\alpha}{2}$.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$2\sin\alpha.\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

От $\sin\alpha>0;\cos\alpha.>0\Rightarrow \alpha\in(0;\frac{\pi}{2})\Rightarrow tg\alpha>0$

От $\begin{array}{l} \cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\Rightarrow\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2} \\ \cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \end{array}$ **1 точка**

$$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$$

След рационализиране на знаменателя на подкоренната величина се получава

$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **1 точка**

Зад.2 а) Решаване на уравнението $\sqrt{5x+6+\sqrt{x+10}}=2$
и получен отговор за $a=-1$**.** **1 точка**

Решаване на уравнението $0{,}125.4^{2x+0{,}75}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

и получен отговор за $b=1$**.** **1 точка**

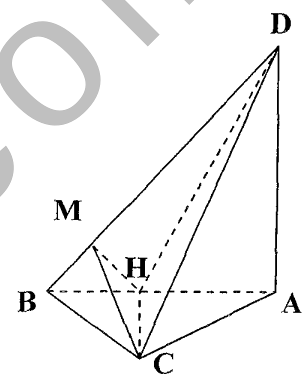
Намерена $\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x) = f(1) = 0$ **и** $\max\limits_{x\in[-1;1]} f(x) = f(-1) = 4$. **1точка**

б) Въведена нова променлива $y = f(x)$ **и преформулиране на условието :**
за $k = ?$ **уравнението** $ky^2 - 2ky + 3 = 0$ **има поне едно решение за** $y \in [0;4]$. **1точка**
За отхвърлено $k = 0$ **.** **0,5 точки**

За намерено $k \in \left(-\infty;-\frac{3}{8}\right]$**- множество от стойности за параметъра, за които уравнението има точно един корен** $\in [0;4]$. **1точка**

За намерено $k \in [3;+\infty)$**- множество от стойности за параметъра, за които уравнението има два корена** $\in [0;4]$. **1 точка**

Оформен отговор: $x \in \left(-\infty;-\frac{3}{8}\right] \cup [3;+\infty)$. **0.5точки**



Зад.3 а) По условие $AC = BC = b, AB = b\sqrt{2}$
$h = AD = AB.tg\,60° = b\sqrt{6}$
1т.

$V = \frac{b^3\sqrt{6}}{6}$
1т.

б) Нека $CH \perp AB$**. Тогава** $CH = \frac{1}{2}AB = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ **и**

$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = b\sqrt{7}$ **.** **1т.**
От $CH \perp AB$ **и** $CH \perp AD \Rightarrow CH \perp (ABD)$**. Тогава** $CH \perp HD, CH \perp BD.$

От правоъгълния ΔCDH **имаме** $\sin\angle CDH = \frac{CH}{CD} = \frac{\sqrt{14}}{14}$ **1т.**

в) Кръстосаните прави CH и BD са перпендикулярни. Тогава съществува равнина, която минава през CH и е перпендикулярна на BD. Нека тя пресича BD в точка M. От $CH \perp MH$ **за търсения ъгъл имаме** $tg\angle CMH = \frac{HC}{HM} = \frac{HC}{BH.\sin 60°} = \frac{1}{\sin 60°} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$**.**
3т.

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максималния брой точки.

За областен кръг се класират ученици, получили минимум 16 точки.