МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28. 02. 2010г.

XII клас

Зад.1 Околният ръб на правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е 5 cm. Лицето на основата му е 360 cm^2 и лицето на сечението DBB_1D_1 е 205 cm^2. Намерете дължините на основните ръбове, обема и лицето на повърхнината на паралелепипеда.

(7 точки)

Зад.2 Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{a.x^2+(a+1).x-1}{2a+1}$, където $a\neq 0$ и $a\neq -\dfrac{1}{2}$ (a-реален параметър).

а) Да се намерят стойностите на параметъра a, за които $5.f(-1)$, $f(0)-a$ и $f(1)$ са последователни членове на аритметична прогресия.

б) За по-голямата стойност на параметъра a, получена в т. а), да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията $F(x)=\dfrac{1}{f(\sin x)+2}$ за $x\in[0\,;2\pi]$, както и стойностите на x, за които те се достигат

(7 точки)

Зад.3 От точка *M* към равнина α са прекарани перпендикулярът *MO* и наклонените *MA, MB* и $MC\,(O, A, B\ и\ C\in\alpha)$. Ортогоналните проекции на *MB* и *MC* са по-малки от проекцията на *MA* съответно с 33cm и 48cm и $\angle OAM:\angle OBM:\angle OCM=1:2:3$. Намерете дължината на перпендикуляра *MO*.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

math-bg.com

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2008г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

XII клас

Зад.1 Намиране на *DB*=41cm **(1 точка)** и *V*=*B.h*=360.5=1800 cm^3 **(1 точка)**. Съставяне на системата $\begin{cases} a^2+b^2=41^2 \\ ab=360 \end{cases}$, където с a и b са означени дължините на основните ръбове**(1 точка)**. Получаване на биквадратното уравнение $b^4-1681.b^2+129600=0$ и решенията му $b_1=40,\ b_2=9$ **(2 точки)**. Определяне на $a_1=9,\ a_2=40$ **(1 точка)** и S_1 = 1210 cm^2 **(1 точка)** /при вярно решаване на системата по друг начин - 3 точки/.

Зад.2 а) $f(x)=\dfrac{a.x^2+(a+1).x-1}{2a+1} \Rightarrow f(-1)=\dfrac{a-(a+1)-1}{2a+1}=\dfrac{-2}{2a+1}$ **(0,5 точки)**,

$f(0)=\dfrac{-1}{2a+1}$ **(0,5 точки)**, $f(1)=\dfrac{a+(a+1)-1}{2a+1}=\dfrac{2a}{2a+1}$ **(0,5 точки)**.

Тъй като $5.f(-1)$, $f(0)-a$ и $f(1)$ са последователни членове на аритметична прогресия, то $2(f(0)-a)=5.f(-1)+f(1)$, т.е. $2\left(\dfrac{-1}{2a+1}-a\right)=5.\dfrac{(-2)}{2a+1}+\dfrac{2a}{2a+1} \Rightarrow a^2+a-2=0 \Rightarrow a_1=1$ или $a_2=-2$ **(1 точка)**.

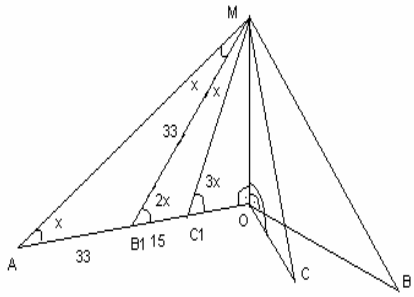
б) Тъй като 1>-2, то $a=1$ и $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{3}$ **(0,5 точки)**, $f(\sin x)=\dfrac{\sin^2 x+2\sin x-1}{3}$ **(0,5 точки)**

$F(x)=\dfrac{1}{\dfrac{\sin^2 x+2\sin x-1}{3}+2}=\dfrac{3}{\sin^2 x+2\sin x+5}$, т.е. $F(x)=\dfrac{3}{\sin^2 x+2\sin x+5}$ **(0,5 точки)**.

Разглеждаме функцията $g(t)=t^2+2t+5$, където $\sin x=t$. Ако $x\in[0\,;2\pi]$, то $|\sin x|\le 1$, т.е. $t\in[-1\,;1]$. Следователно търсим НГС и НМС на $g(t)$ за $t\in[-1\,;1]$. Графиката е парабола с връх $V(-1\,;4)$, обърната «нагоре». Тогава $g(t)$ расте в интервала $[-1\,;1]$ **(1 точка)**, т.е. НГС $g(t)=g(1)=8$ **(0,5 точки)** и НМС $g(t)=g(-1)=4$ **(0,5 точки)**.

От $4\le g(t)\le 8$ за $\forall t\in[-1\,;1]$ следва, че $\dfrac{3}{8}\le\dfrac{3}{g(t)}\le\dfrac{3}{4}$, т.е. $\dfrac{3}{8}\le F(x)\le\dfrac{3}{4} \Rightarrow$ НМС $F(x)=\dfrac{3}{8}$ за $\sin x=1$,т.е. $x=\dfrac{\pi}{2}$ **(0,5точки)** и НГС $F(x)=\dfrac{3}{4}$ за $\sin x=-1$,т.е. $x=\dfrac{3\pi}{2}$ **(0,5 точки)**.

Зад.3 Построяваме точки B_1 $(B_1\in OA)$ и C_1 $(C_1\in OA)$, такива, че OB_1=OB и OC_1=OC. От условието на задачата следва, че AB_1=33 cm и B_1C_1=15 cm**(1 точка)**.



Означаваме $\angle OAM=x(x>0) \Rightarrow \angle OB_1M=2x$ и $\angle OC_1M=3x$ **(0,5 точки)**.

Тъй като $\angle OB_1M$ е външен за $\Delta MAB_1 \Rightarrow \angle AMB_1=x$ **(0,5 точки)** $\Rightarrow AB_1=MB_1=33$cm **(0,5 точки)**.

Аналогично се доказва, че $\Rightarrow \angle C_1MB_1=x$ **(0,5 точки)**. От Синусова теорема за ΔB_1C_1M следва, че $\dfrac{33}{\sin(180^0-3x)}=\dfrac{15}{\sin x}$

$\Rightarrow$ 5sin3x=11sinx $\Rightarrow$ 5(3sinx−4sin^{3}x)=11sinx $\Rightarrow$ sinx= $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **(2 точки)**.

$\Rightarrow$ cox= $\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ **(0,5 точки)** $\Rightarrow$ sin2x=2sinxcosx= $\dfrac{4}{5}$ **(0,5 точки)**.

От правоъгълния $\Delta OB_1M \Rightarrow \dfrac{OM}{MB_1}=\sin 2x \Rightarrow \dfrac{OM}{33}=\dfrac{4}{5} \Rightarrow OM=\dfrac{132}{5}=26{,}4\ cm$ **(1 точка)**.

math-bg.com